



**ANA MARIA
MOITA PAULINO**

**Provas de Geometria e Medida no
âmbito das Metas Curriculares de
Matemática no 3.º Ciclo**



**ANA MARIA
MOITA PAULINO**

**Provas de Geometria e Medida no
âmbito das Metas Curriculares de
Matemática no 3.º Ciclo**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para professores, realizada sob a orientação científica da Professora Doutora Rute Correia Lemos, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

O júri / The jury

Presidente / President

Prof. Doutor Paulo José Fernandes Almeida
professor auxiliar da Universidade de Aveiro

Prof. Doutora Maria Cláudia Freitas de Sousa
Mendes Araújo
professora auxiliar da Universidade do Minho

Prof. Doutora Rute Correia Lemos
professora auxiliar da Universidade de Aveiro

Agradecimentos /

A todos os que, de alguma forma, contribuíram para a concretização deste sonho, em especial à minha orientadora, Prof. Doutora Rute Correia Lemos, pela sua dedicação, apoio e disponibilidade, assim como pelas suas críticas, correções e sugestões significativas para a produção deste documento.

Acknowledgements

To all those who, in some way, contributed to the achievement of this dream, particularly to my advisor, Prof. Dr. Rute Correia Lemos, for their dedication, support and availability, as well as for her criticisms, corrections and significant suggestions for the production of this document.

Palavras-chave Metas Curriculares de Matemática, Geometria e Medida, Prova, Desigualdades

Resumo De acordo com o Novo Programa de Matemática, homologado a 17 de junho de 2013, que permite o enquadramento da aprendizagem, e as Metas Curriculares de Matemática, que permitem a sua concretização, há a ter em conta alguns desempenhos essenciais que os alunos deverão mostrar. Dos requeridos para o 3.º ciclo do Ensino Básico, destaca-se o seguinte: “provar/demonstrar: o aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível”.

É no domínio da Geometria e Medida que a problemática da demonstração pode ser abordada mais prematuramente, uma vez que esta pode ser suportada por uma imagem. Nesse âmbito, esta dissertação apresenta uma compilação de teoremas, proposições e respetivas provas, na maioria dos casos acompanhadas de uma representação geométrica elucidativa.

O Teorema de Pitágoras, o mais famoso da Geometria Plana, é naturalmente parte integrante deste trabalho. São muitas e variadas as demonstrações deste teorema. Apresentam-se algumas essencialmente geométricas atribuídas a

matemáticos conhecidos. Raciocínios geométricos, ilustrando os casos notáveis da multiplicação, merecem também algum destaque.

Por último, incluem-se algumas desigualdades conhecidas, entre elas a desigualdade triangular, a desigualdade da média aritmética-geométrica e a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Pretende-se que este trabalho seja uma mais-valia para os professores a lecionar Matemática ao 3.º ciclo do Ensino Básico.

Keywords

Mathematics Curricular Goals, Geometry and Measurement, Proof, Inequalities

Abstract

According to the New Math Program, approved on 17 June 2013, which enables the framework for learning, and the Curricular Goals of Mathematics, that allow its implementation, some essential performances that students should show are to be taken into account. From those who are required for the 3rd cycle of Basic Education, we highlight the following: "prove/show: the student must present a mathematical proof as rigorous as possible".

It is in the field of Geometry and Measurement that the demonstrating problem can be addressed more prematurely, since this can be supported by an image. In this context, this dissertation presents a collection of theorems, propositions and respective proofs, in most cases accompanied by a geometrical representation.

The Pythagorean Theorem, the most famous of Plane Geometry, is of course an integral part of this work. There are many and varied proofs of this theorem. We present some, primarily geometric, assigned to known mathematicians. Geometric reasoning, illustrating the remarkable cases of multiplication, also deserves some attention.

Finally, some known inequalities are included, among them the triangle inequality, the arithmetic-geometric mean inequality and the Cauchy-Schwarz inequality.

It is intended that this work will be an asset for Mathematics teachers at the 3rd cycle of Basic Education.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 - GEOMETRIA E MEDIDA – 3.º CICLO	5
1.1. Elementos de axiomatização da Geometria Plana.....	6
1.1.1. Linguagem das teorias axiomatizadas	6
1.1.2. Objetos primitivos e relações primitivas	7
1.1.3. Axiomas da Geometria Absoluta	8
I. Axiomas de incidência	9
II. Axiomas de ordem.....	10
III. Axiomas sobre medição de segmentos.....	10
IV. Axiomas sobre medição de ângulos.....	12
V. Axioma de congruência	15
1.1.4. Teorema do ângulo externo e suas consequências.....	18
1.1.5. Axioma das Paralelas.....	25
1.1.6. Posição relativa de retas no plano	26
1.1.7. Soma dos ângulos internos de um triângulo	30
1.2. Congruência, Teorema de Tales e semelhança	31
1.2.1. Critérios de congruência de triângulos	34
1.2.2. Teorema de Tales	38
1.2.3. Critérios de semelhança de triângulos	42
1.2.4. Relação entre perímetros e áreas de figuras semelhantes	47
1.3. Continuação do estudo dos polígonos e da circunferência.	50
1.3.1. Propriedades dos polígonos envolvendo ângulos internos e externos ...	50
1.3.2. Propriedades envolvendo quadriláteros	54
1.3.3. Áreas de triângulos e quadriláteros.....	62

1.3.4.	Lugares geométricos envolvendo pontos notáveis de triângulos.	67
1.3.5.	Ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência	77
1.4.	Vetores, translações e isometrias.....	88
1.4.1.	Segmentos orientados	88
1.4.2.	Vetores e suas propriedades	91
1.4.3.	Isometrias.....	96
1.5.	Trigonometria	102
1.5.1.	Razões trigonométricas.....	103
1.5.2.	Relações entre razões trigonométricas	105
CAPÍTULO 2 - TEOREMA DE PITÁGORAS.....		109
2.1.	Teorema e algumas demonstrações	111
2.2.	Provas sem palavras do Teorema de Pitágoras.....	115
2.2.1.	Prova de Bhaskara.....	116
2.2.2.	Prova de James A. Garfield	117
2.2.3.	Prova do “quadrado chinês”	118
2.2.4.	Prova de Henry Dudeney	119
2.2.5.	Prova de Pappus.....	120
2.2.6.	Prova de Michael Hardy	121
2.2.7.	Prova de Leonardo Da Vinci	122
2.2.8.	“Antiga Demonstração Grega”	123
2.2.9.	Prova de Euclides.	124
2.2.10.	Prova de George Pólya	125
2.2.11.	Demonstração com o Tangram.....	127
2.3.	Aplicações do Teorema de Pitágoras	128
2.3.1.	Áreas de semicírculos sobre os lados de um triângulo retângulo	129
2.3.2.	As lúnulas de Hipócrates.....	130
2.3.3.	Áreas de figuras semelhantes sobre os lados de um triângulo retângulo	130
2.3.4.	Números irracionais e Teorema de Pitágoras	132
2.3.5.	Extração geométrica da raiz quadrada do produto de dois números. ...	132
2.3.6.	Fórmula geradora de ternos pitagóricos.....	133
2.3.7.	Distância entre dois pontos no plano ou no espaço	134

CAPÍTULO 3 - RACIOCÍNIOS GEOMÉTRICOS.....	138
3.1. Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição	140
3.2. Produto de dois binómios	140
3.3. Casos notáveis da multiplicação	141
3.3.1. Quadrado da soma.....	141
3.3.2. Quadrado da diferença.....	141
3.3.3. Diferença de quadrados	142
3.4. Adição do quadrado da soma com o quadrado da diferença	142
3.5. Outro caso envolvendo quadrados.....	143
3.6. Cubo da soma e cubo da diferença.....	143
3.7. Regra de Pitágoras para calcular o quadrado de um número inteiro	145
CAPÍTULO 4 – DESIGUALDADES	147
4.1. Desigualdade de segmentos de reta e de triângulos.....	147
4.2. Desigualdades de polígonos e linhas poligonais convexas	151
4.3. Desigualdade envolvendo a bissetriz de um ângulo.....	153
4.4. Desigualdades das médias aritmética, geométrica, harmónica, quadrática	154
4.4.1. Desigualdade da média aritmética-geométrica	156
4.4.2. Desigualdade da média geométrica-harmónica	158
4.4.3. Desigualdade da média quadrática-aritmética	160
4.5. Desigualdade de Cauchy-Shwarz	163
CONCLUSÃO.....	165
LISTA DE FIGURAS	167
LISTA DE SIMBOLOS.....	175
BIBLIOGRAFIA	179
NETGRAFIA.....	185

INTRODUÇÃO

O nosso primordial objetivo nesta dissertação é fazer uma compilação das principais propriedades integrantes no domínio *Geometria e Medida – 3.º ciclo* e apresentar sugestões das respectivas demonstrações, elucidadas com uma prova geométrica na maioria dos casos. Salientamos, no entanto, que o nosso estudo recai essencialmente sobre a Geometria Euclidiana Plana.

Ao invocar uma imagem, um esquema ou uma representação geométrica visualmente estimulante, uma “prova sem palavras” tem o propósito de explicar e convencer o leitor da veracidade de uma afirmação matemática, podendo assumir um papel importante do ponto de vista pedagógico.

Assim, nesta exposição é dado, igualmente, destaque a alguns resultados suscetíveis de “provas sem palavras” nomeadamente relacionados com o Teorema de Pitágoras, casos notáveis da multiplicação ou desigualdades de números reais.

O trabalho apresentado é composto por quatro capítulos, a saber:

Capítulo 1 - *Geometria e Medida – 3.º ciclo*;

Capítulo 2 - *Teorema de Pitágoras*;

Capítulo 3 – *Raciocínios Geométricos*;

Capítulo 4 – *Desigualdades*.

Em cada um dos capítulos é apresentada uma fundamentação teórica e, nalguns, são dadas a conhecer definições, axiomas, proposições, teoremas e demonstrações.

Todas as representações geométricas, apresentadas nesta dissertação, foram feitas com recurso ao *software* de geometria dinâmica – *GeoGebra*.

Fazendo um breve resumo de cada capítulo, começamos por referir que no primeiro, intitulado *Geometria e Medida*, são abordados, de acordo com as Metas Curriculares de Matemática previstas para o 3.º Ciclo do Ensino Básico, cinco dos grandes temas que podemos elencar neste domínio, tendo sido restringido o nosso estudo ao ciclo atrás referido.

No tema *Elementos de axiomatização da Geometria Plana*, é apresentada a “linguagem das teorias axiomatizadas” e uma estrutura lógica constituída por objetos primitivos, relações primitivas, axiomas, teoremas e proposições.

Congruência, Teorema de Tales e semelhança é outro tema considerado. Neste são exibidos os critérios de congruência e de semelhança de triângulos, é enunciado o importante Teorema de Tales e são referidas algumas das suas consequências fundamentais.

No tópico *Continuação do estudo dos polígonos e da circunferência* é dado ênfase ao estudo dos quadriláteros (propriedades e áreas), aos lugares geométricos envolvendo pontos notáveis de triângulos e ao estudo da circunferência e suas propriedades.

Vetores, translações e isometrias trata as propriedades de adição de vetores e das isometrias. São, ainda, aqui referidos os vários tipos de simetrias.

Por último, no tema *Trigonometria*, são apresentadas as noções básicas essenciais ao ensino deste assunto no 9.º ano, nomeadamente as razões trigonométricas de ângulos agudos. O Teorema Fundamental da Trigonometria também é meritório de destaque.

O segundo capítulo é dedicado exclusivamente ao estudo do Teorema de Pitágoras, dada a sua importância na evolução da Geometria. Este teorema faz parte do Programa Nacional de Matemática do Ensino Básico e é um assunto tratado no decorrer do 8.º ano de escolaridade. No entanto, este resultado pode ser apresentado de diversas formas ao longo dos vários ciclos de ensino.

Neste segundo capítulo, começámos por apresentar uma resumida biografia de Pitágoras e a localização histórica da época em que foi, pela primeira vez,

demonstrado o referido teorema. De seguida, damos a conhecer o teorema tal como Pitágoras o enunciou, a forma mais simples como atualmente é conhecido, a provável demonstração com que Pitágoras terá verificado o teorema, algumas das muitas demonstrações, essencialmente geométricas, realizadas por outros autores e ainda algumas aplicações do Teorema de Pitágoras.

O trabalho com expressões algébricas constitui uma vertente importante da aprendizagem da Álgebra, nomeadamente no 3.º ciclo. Nesse âmbito, “assumem especial importância os casos notáveis da multiplicação de binómios. A igualdade entre $(x + a)^2$ e $x^2 + 2ax + a^2$ (quadrado de um binómio) deve ser mostrada tanto algebricamente como geometricamente. (...) A interpretação geométrica, a partir da interpretação da área do quadrado na sua totalidade ou a partir de uma dada decomposição, pode ajudar a promover a compreensão entre as duas expressões (...) Os casos notáveis da multiplicação podem também ser trabalhados com base em tarefas exploratórias envolvendo a procura de relações entre números, a identificação de regularidades e a sua generalização (...).

*In Álgebra no Ensino Básico,
DGIDC, 2009*

Assim, pela exploração, experimentação e pela razão surge o raciocínio geométrico que é um instrumento para o processo de elaboração de uma prova.

O exposto anteriormente e o facto de o Programa de Matemática do Ensino Básico focar como propósito principal de ensino a necessidade de desenvolvimento do sentido espacial dos alunos e colocar a ênfase na visualização e no raciocínio geométrico fundamentaram a escolha do tema *Raciocínios Geométricos* para um dos assuntos abordados nesta dissertação. Como tal, no terceiro capítulo, apresentamos algumas identidades algébricas que podem ser esclarecidas através de pensamentos geométricos, entre elas os casos notáveis da multiplicação.

No último capítulo, trataremos o tema *Desigualdades*. Embora este assunto seja abordado de uma forma subtil no Ensino Básico, merece a nossa atenção pois é considerado de extrema importância para o desenvolvimento da Matemática.

Apresentamos e provamos algumas desigualdades importantes, salientando a desigualdade triangular, a desigualdade da média aritmética-geométrica e a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Nestas duas últimas restringimo-nos ao caso

$n = 2$, compatível com o escalão etário dos alunos que frequentam o 3.º ciclo. Embora não sejam parte integrante do Programa de Matemática do 3.º ciclo, são resultados interessantes e essenciais para uma boa aprendizagem da Matemática a um grau mais elevado, dignos de serem partilhados com os alunos, especialmente com os mais interessados e motivados, e podem ser fundamentais para a resolução de problemas em competições, tais como as Olimpíadas da Matemática.

CAPÍTULO 1

GEOMETRIA E MEDIDA – 3.º CICLO

O 3.º ciclo “constitui uma importante etapa na formação matemática dos alunos, sendo simultaneamente um período de consolidação dos conhecimentos e capacidades a desenvolver durante o Ensino Básico e de preparação para o Ensino Secundário. Em particular, é fundamental que comecem a ser utilizados corretamente os termos (definição, propriedade, teorema, etc) e os procedimentos demonstrativos próprios da Matemática.”

*In Programa e Metas Curriculares
Matemática
Ensino Básico*

No domínio Geometria e Medida, abordaremos cinco grandes temas. Em cada um deles apresentaremos definições, teoremas ou proposições, e respetivas demonstrações, subjacentes ao tema em estudo. São eles:

“Elementos de axiomatização da Geometria Plana”;

“Congruência, Teorema de Tales e semelhança”;

“Continuação do estudo dos polígonos e da circunferência”;

“Vetores, translações e isometrias”;

“Trigonometria”.

1.1. Elementos de axiomatização da Geometria Plana

Por volta do século III a.C., a Geometria foi exibida de forma axiomática por Euclides de Alexandria, grande mestre e matemático grego, conhecido como o "Pai da Geometria". Considerava a Geometria como uma ciência dedutiva assente em hipóteses básicas - os "axiomas", que eram, por ele, considerados intuitivos. Compilou todos os seus conhecimentos matemáticos, relativos à sua época, num livro composto por 13 volumes, os "Elementos". Nele são apresentados definições, axiomas, proposições (teoremas e construções) e provas matemáticas das proposições.

1.1.1. Linguagem das teorias axiomatizadas

Da leitura das Metas Curriculares de Matemática, o domínio Geometria e Medida, 9.º ano de escolaridade, está fragmentado em vários subdomínios, entre eles "Utilizar corretamente o vocabulário "próprio" do método axiomático". Este, por sua vez, é apresentado como uma sequência de objetivos gerais e descritores que a seguir apresentamos:

1. "Identificar uma «teoria» como um dado conjunto de proposições consideradas verdadeiras, incluindo-se também na teoria todas as proposições que delas forem dedutíveis logicamente.
2. Reconhecer, no âmbito de uma teoria, que para não se incorrer em raciocínio circular ou numa cadeia de deduções sem fim, é necessário fixar alguns objetos («objetos primitivos»), algumas relações entre objetos que não se definem a partir de outras («relações primitivas»), e algumas proposições que se consideram verdadeiras sem as deduzir de outras («axiomas»).
3. Designar por «axiomática de uma teoria» um conjunto de objetos primitivos, relações primitivas e axiomas a partir dos quais todos os objetos e relações da teoria possam ser definidos e todas as proposições verdadeiras demonstradas e utilizar corretamente os termos «definição», «teorema» e «demonstração» de um teorema».

4. Saber que os objetos primitivos, relações primitivas e axiomas de algumas teorias podem ter interpretações intuitivas que permitem aplicar os teoremas à resolução de problemas da vida real e, em consequência, testar a validade da teoria como modelo da realidade em determinado contexto.
5. Distinguir «condição necessária» de «condição suficiente» e utilizar corretamente os termos «hipótese» e «tese» de um teorema e o símbolo \Rightarrow .
6. Saber que alguns teoremas podem ser designados por «lemas», quando são considerados resultados auxiliares para a demonstração de um teorema considerado mais relevante e outros por «corolários» quando no desenvolvimento de uma teoria surgem como consequências estreitamente relacionadas com um teorema considerado mais relevante”.

*In Programa e Metas Curriculares
Matemática
Ensino Básico*

1.1.2. Objetos primitivos e relações primitivas

É comum, na área da Geometria, recorrer a demonstrações geométricas e estabelecer as noções geométricas através de definições. No entanto, as noções primitivas da Geometria serão adotadas sem definição, uma vez que já temos um conhecimento intuitivo decursivo da experiência e da observação.

Consideremos um conjunto formado por elementos de três espécies diferentes: pontos, retas e planos. Os conceitos de *ponto*, *reta* e *plano* não se definem, pelo que se denominam *objetos primitivos*.

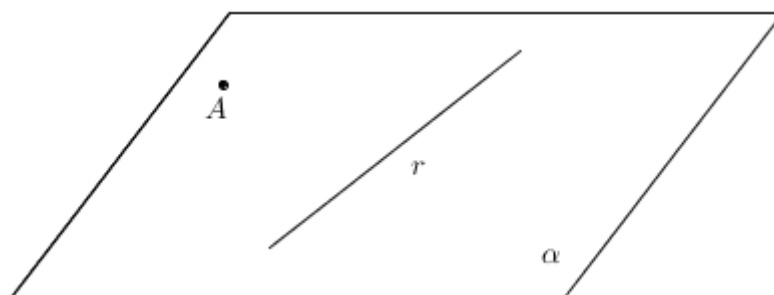


Figura 1. Objetos primitivos: ponto, reta e plano

Poderemos supor que os objetos primitivos, acima referidos, estabelecem entre si relações de incidência e de ordem, aparecendo, assim, as relações primitivas "um ponto P e uma reta r incidem", "um ponto P e um plano α incidem" (ou, simplesmente, um ponto P pertence a uma reta r ou plano α); e "o ponto A está entre o ponto B e o ponto C " [18].

1.1.3. Axiomas da Geometria Absoluta

O aluno deve “Saber que na forma histórica original da Axiomática de Euclides se distinguem «postulados» de «axiomas», de acordo com o que se supunha ser o respetivo grau de evidência e domínio de aplicabilidade, e que nas axiomáticas atuais essa distinção não é feita, tomando-se o termo «postulado» como sinónimo de «axioma», e enunciar exemplos de postulados e axiomas dos «Elementos de Euclides».”

*In Programa e Metas Curriculares
Matemática
Ensino Básico*

A Geometria, como já referimos, edifica-se partindo de um certo número de princípios óbvios não passíveis de demonstração, como sendo os axiomas, as definições e os postulados. É através destes princípios e de deduções contínuas que chegamos à demonstração das proposições, teoremas e corolários.

Nesta linha de pensamento, enunciaremos alguns axiomas da Geometria Absoluta Plana, necessários à demonstração dos resultados apresentados, que, segundo refere João Lucas Marques Barbosa na sua obra “Geometria Euclidiana Plana” [5], são os selecionados por A. V. Pogorélov¹ no seu livro “Geometria Elementar”.

A Geometria Absoluta, também conhecida como sendo a Geometria Euclidiana sem o Quinto Postulado de Euclides, é uma teoria axiomática incompleta na medida em que contempla axiomas cuja veracidade ou falsidade não nos permite determinar, por exemplo, se há ou não unicidade de uma reta, paralela a outra, passando num ponto.

¹ Aleksei Vasilevich Pogorélov (1919 - 2002) foi um matemático ucraniano/soviético conhecido pelos seus contributos no estudo da Geometria Diferencial.

I. Axiomas de incidência

Axioma 1. *Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.*

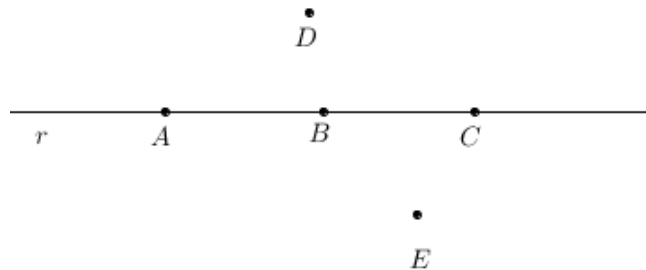


Figura 2. A , B e C pertencem à mesma reta r

Axioma 2. *Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.*



Figura 3. r é a única reta que contém os pontos A e B

A reta r que contém os pontos A e B também pode ser representada por reta AB .

Definição. Duas retas são *complanares* se existir um plano que as contenha.

Definição. Duas retas são *coincidentes* se são coplanares e possuem todos os pontos em comum.

Proposição 1.

Duas retas distintas ou não se intersectam ou se intersectam num único ponto.

Prova. Consideremos duas retas distintas e suponhamos que elas se intersectam em dois (ou mais) pontos. Pelo Axioma 2, estas retas são coincidentes, o que é uma contradição pois, por hipótese, elas são distintas. Portanto, a interseção dessas retas ou é o conjunto vazio ou só contém um ponto. ■

II. Axiomas de ordem

Axioma 3. *Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles está entre os outros dois.*

Na Figura 2, os pontos A, B, C são três pontos distintos da reta r e verificamos que B está entre A e C .

Axioma 4. *Dados dois pontos A e C , existem um ponto B entre A e C e um ponto D tal que C está entre A e D .*



Figura 4. Entre dois pontos quaisquer existe sempre um outro ponto

Uma consequência imediata do Axioma 4 é que, entre quaisquer dois pontos de uma reta, existe uma infinidade de pontos.

Definição. *Semiplano* é uma superfície plana parcialmente limitada por uma reta.

Axioma 5. *Toda a reta determina exatamente dois semiplanos distintos cuja interseção é a própria reta.*

III. Axiomas sobre medição de segmentos

Definição. O conjunto dos pontos A, B e todos os pontos que estão entre A e B é chamado de *segmento* $[AB]$; se A e B são coincidentes, dizemos que $[AB]$ é o *segmento nulo*; os pontos A e B são chamados as *extremidades* do segmento $[AB]$.



Figura 5. Segmento de reta de extremos A e B

Axioma 6. A todo o par de pontos do plano corresponde um número não negativo. Este número é zero se e somente se os pontos são coincidentes.

Definição. O número referido no axioma anterior é chamado de *distância* entre os pontos A e B ou *comprimento do segmento* $[AB]$ e representa-se por \overline{AB} .

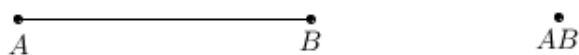


Figura 6. $\overline{AB} > 0$; $\overline{AB} = 0$

Axioma 7. Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.

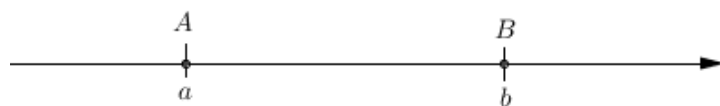


Figura 7. A distância entre A e B é $|b - a|$

Dados dois pontos A e B cujos correspondentes números são, respetivamente, a e b , a sua distância é o valor absoluto da diferença desses dois números. Portanto, $\overline{AB} = |b - a|$.

Axioma 8. Se o ponto C se encontra entre A e B , então $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$.

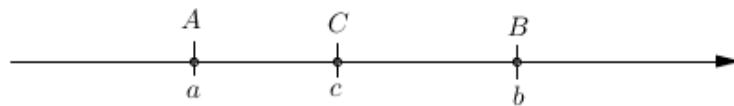


Figura 8. $\overline{AC} = |c - a|$, $\overline{CB} = |b - c|$, $\overline{AB} = |b - a|$

Definição. Dados dois pontos distintos, A e B , a *semirreta* de origem A contendo o ponto B , representada por \overrightarrow{AB} , é o conjunto dos pontos do segmento $[AB]$ reunido com o conjunto de todos os pontos C tais que B está entre A e C .

A semirreta \overrightarrow{AB} tem a *direção* da reta AB .

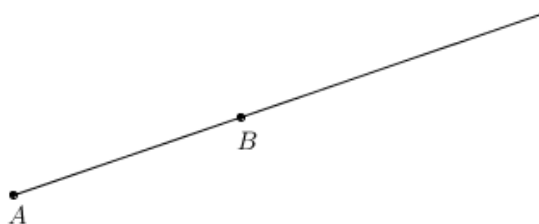


Figura 9. Semirreta \overrightarrow{AB}

Proposição 2.

Se, numa semirreta \overrightarrow{AB} , considerarmos um segmento de reta $[AC]$ com $\overline{AC} < \overline{AB}$, então o ponto C estará entre A e B .

Prova.

Consideremos a semirreta \overrightarrow{AB} e um segmento de reta $[AC]$ com $\overline{AC} < \overline{AB}$.



Figura 10. Semirreta \overrightarrow{AB} e um ponto C que lhe pertence

Como se trata da semirreta \overrightarrow{AB} , o ponto A não poderá estar entre B e C , uma vez que B e C também pertencem à semirreta. Se o ponto B estivesse entre A e C , então, pelo Axioma 8, teríamos

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

e, conseqüentemente, $\overline{AB} < \overline{AC}$, o que contraria a hipótese.

Concluimos, portanto, que é o ponto C que está entre A e B . ■

IV. Axiomas sobre medição de ângulos

Definição. Duas semirretas com a mesma origem determinam, no plano, duas regiões chamadas *ângulos*: um *convexo* e outro *não convexo*.

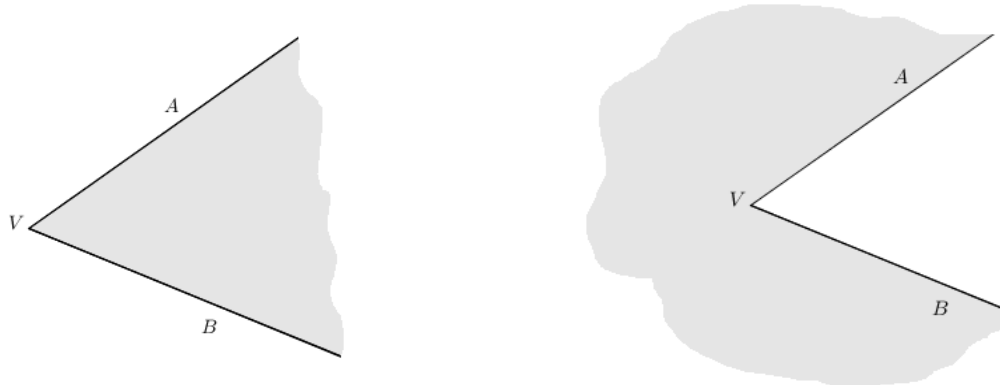


Figura 11. Ângulo convexo; ângulo não convexo

As semirretas \overrightarrow{VA} e \overrightarrow{VB} chamam-se *lados do ângulo* AVB e a sua origem comum, V , *vértice do ângulo*. Simbolicamente, escreveremos $\angle AVB$ quando nos quisermos referir ao *ângulo* AVB .

Um ângulo formado por duas semirretas distintas de uma mesma reta chama-se *ângulo raso*.

Por simplicidade de linguagem, a palavra ângulo reporta-se, daqui em diante, a ângulo convexo.

Axioma 9. *A todo o ângulo corresponde uma medida em graus maior ou igual a zero. Esta medida é zero se e somente se os seus lados são duas semirretas coincidentes.*

Denotaremos por $A\hat{V}B$, ou abreviadamente por \hat{V} , a medida da amplitude, ou simplesmente medida, do ângulo AVB . A unidade padrão de medida de um ângulo é o *grau*, cujo símbolo é $^\circ$.

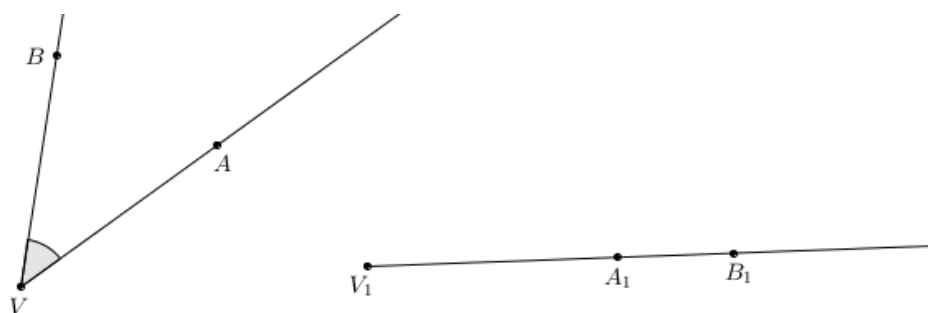


Figura 12. $A\hat{V}B > 0^\circ$; $A_1\hat{V}_1B_1 = 0^\circ$

Definição. Uma semirreta divide um semiplano se ela estiver contida no semiplano e a sua origem for um ponto da reta que o determina.

Axioma 10. *Existe uma correspondência biunívoca entre as semirretas com a mesma origem que dividem um dado semiplano e os números reais entre 0 e 180, de modo que a diferença entre os números seja a medida do ângulo formado pelas semirretas correspondentes.*

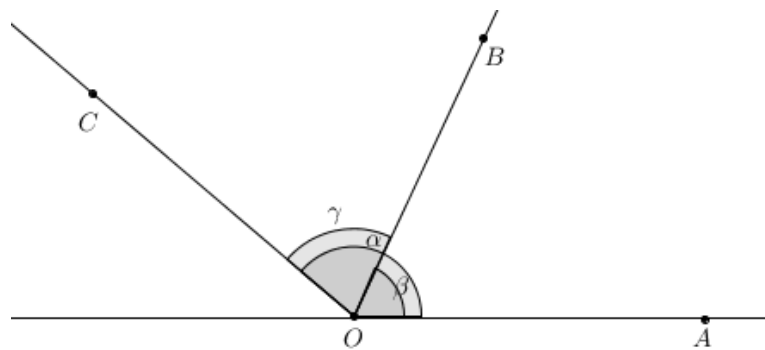


Figura 13. Correspondência biunívoca entre as semirretas, \vec{OB} e \vec{OC} , e os números β e α

Um ângulo raso mede 180° .

Definição. Um ângulo diz-se *agudo* se a sua medida for inferior a 90° ; *reto* se a sua medida for 90° ; *obtusos* se a sua medida for superior a 90° .

Definição. Sejam \vec{OA} , \vec{OB} e \vec{OC} semirretas com a mesma origem. Se o segmento $[AB]$ intersectar a semirreta \vec{OC} diremos que esta divide o ângulo AOB .

Axioma 11. *Se uma semirreta \vec{OC} divide um ângulo AOB , então*

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}.$$

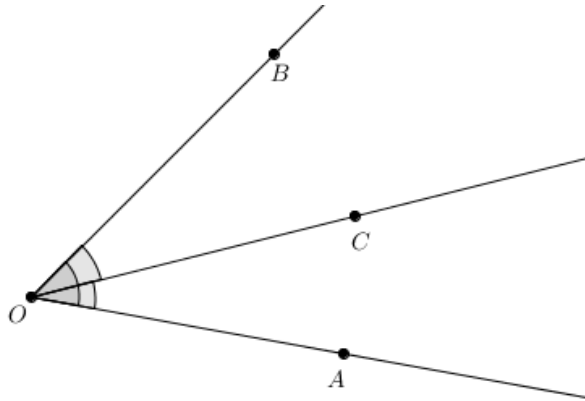


Figura 14. $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}$

Definição. Dois ângulos cuja soma das suas amplitudes é igual 90° dizem-se *complementares*; se a soma das duas amplitudes for 180° dizem-se *suplementares*.

V. Axioma de congruência

Definição. Dizemos que duas figuras A e B são *congruentes* quando coincidem por sobreposição e escrevemos $A \cong B$.

A relação de congruência é uma *relação de equivalência*, isto é, uma relação

- i. *reflexiva*: $A \cong A$, para toda a figura A ;
- ii. *simétrica*: $A \cong B$ implica $B \cong A$, para todas as figuras A, B ;
- iii. *transitiva*: se $A \cong B$ e $B \cong C$ implica $A \cong C$, para todas as figuras A, B, C .

Dois *segmentos* de reta são *congruentes* quando possuem o mesmo comprimento.

Dois *ângulos* são *congruentes* quando possuem a mesma medida.

É de referir que ângulos complementares ou suplementares a ângulos congruentes são congruentes.

Definição. Uma figura plana formada por três pontos que não pertencem a uma mesma reta e pelos três segmentos determinados por estes três pontos denomina-se *triângulo*. Os três pontos são chamados *vértices do triângulo* e os segmentos

são os *lados*.

Representa-se por $[ABC]$ o triângulo de vértices A , B e C .

Definição. Duas semirretas contendo dois lados de um triângulo e de origem num mesmo vértice formam um ângulo, chamado *ângulo interno* do triângulo.

Se uma das semirretas é o prolongamento de um dos lados do triângulo, então forma-se um *ângulo externo*.

O ângulo externo e , do triângulo da figura, é *adjacente* ao ângulo interno i e são suplementares.

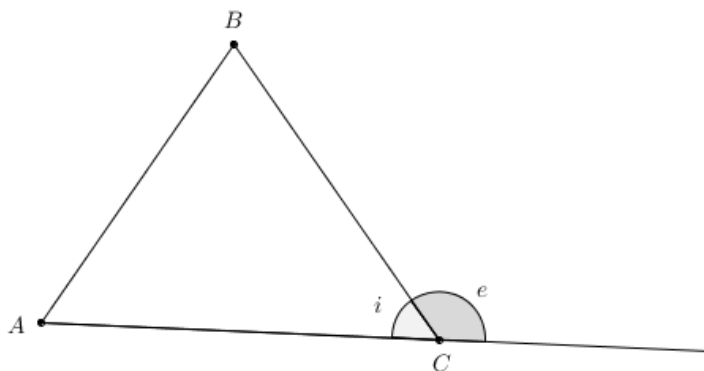


Figura 15. Triângulo $[ABC]$, ângulo interno i e ângulo externo e

Quanto à medida do comprimento dos seus lados um triângulo pode ser:

Equilátero - quando tem todos os lados congruentes;

Isósceles - quando tem pelo menos dois lados congruentes;

Escaleno - quando tem todos os lados não congruentes.

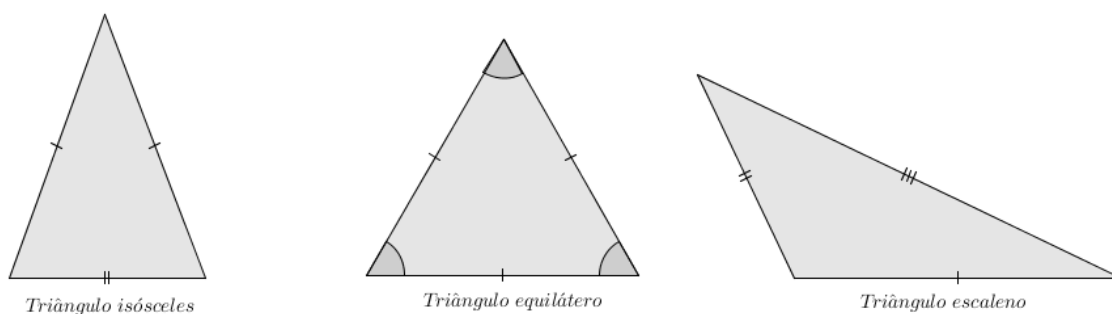


Figura 16. Classificação de triângulos quanto aos lados

Quanto à medida de amplitude dos seus ângulos, um triângulo pode ser:

Acutângulo - quando tem todos os ângulos agudos;

Retângulo - quando tem um ângulo reto;

Obtusângulo - quando tem um ângulo obtuso.

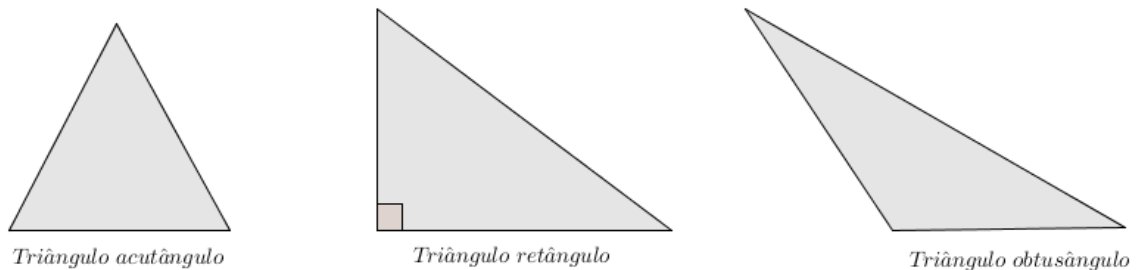


Figura 17. Classificação de triângulos quanto aos ângulos

Definição. Num triângulo $[ABC]$, dizemos que o lado $[AB]$ se *opõe* ao ângulo ACB , o lado $[AC]$ se *opõe* ao ângulo ABC ; o lado $[BC]$ se *opõe* ao ângulo BAC .

Observação. Dois triângulos são *congruentes* se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os seus vértices, de modo que os lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

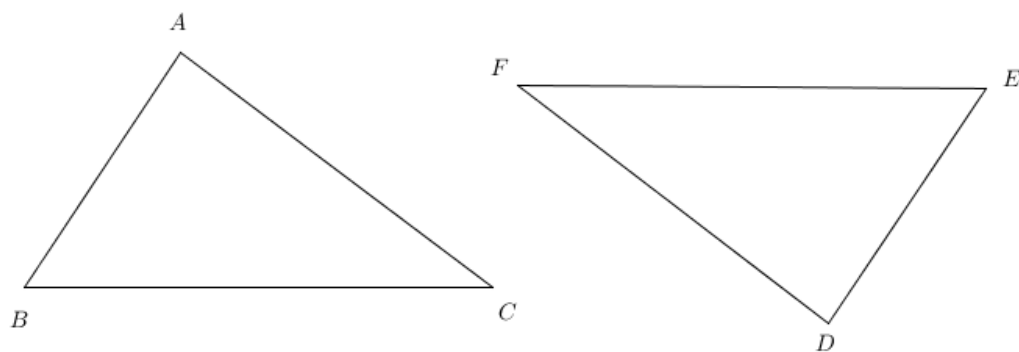


Figura 18. Triângulos congruentes

Se $[ABC]$ e $[DEF]$ são dois triângulos congruentes e se A corresponde a D , B corresponde a E e C corresponde a F define a congruência entre eles, então

$$\overline{AB} = \overline{DE}, \quad \overline{BC} = \overline{FE}, \quad \overline{AC} = \overline{DF}, \quad \hat{A} = \hat{D}, \quad \hat{B} = \hat{E}, \quad \hat{C} = \hat{F}.$$

Axioma 12. (1.º caso de congruência de triângulos)

Dados dois triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$, tais que $[AB] \cong [DE]$, $[AC] \cong [DF]$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$, então $[ABC] \cong [DEF]$.

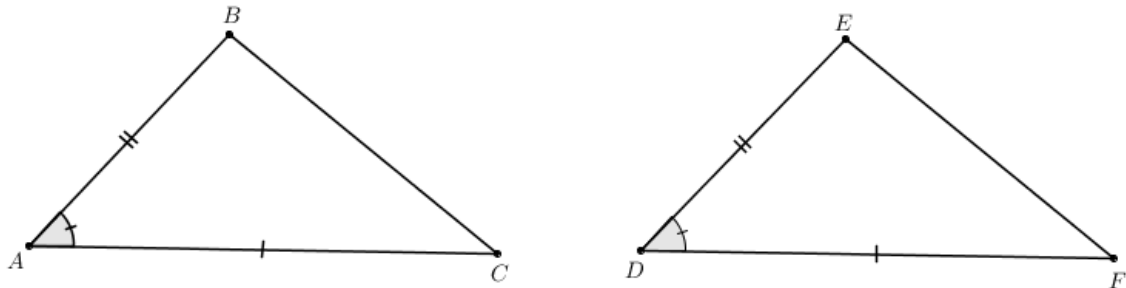


Figura 19. 1.º caso de congruência de triângulos

Este axioma é, usualmente, designado por *critério de congruência de triângulos LAL*, significando lado, ângulo, lado, por razões óbvias.

1.1.4. Teorema do ângulo externo e suas consequências

Definição. Dois ângulos cujos lados de um são formados pelos prolongamentos dos lados do outro chamam-se *verticalmente opostos*.

Proposição 3.

Quaisquer dois ângulos verticalmente opostos são congruentes.

Prova. Consideremos os ângulos verticalmente opostos DAE e BAC .

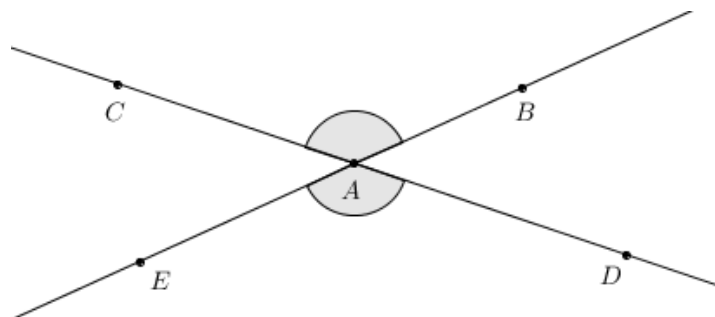


Figura 20. $\angle DAE$ e $\angle BAC$ são verticalmente opostos

Por observação da figura, verificamos que o ângulo BAD é suplementar simultaneamente aos ângulos DAE e BAC . Assim, estes ângulos têm a mesma amplitude, $180^\circ - \widehat{BAD}$, pelo que $\angle DAE \cong \angle BAC$. ■

Definição. Chamamos *ponto médio* do segmento $[AB]$ a um ponto C deste segmento, tal que $\overline{AC} = \overline{CB}$.

Teorema do ângulo externo

Num triângulo, a medida de qualquer ângulo externo é maior do que a medida de um ângulo interno não adjacente a esse ângulo.

Prova. Sem perda de generalidade, consideremos no triângulo $[ABC]$ da figura o ângulo externo CBD . Os ângulos CAB e ACB são ângulos internos não adjacentes ao ângulo externo CBD .

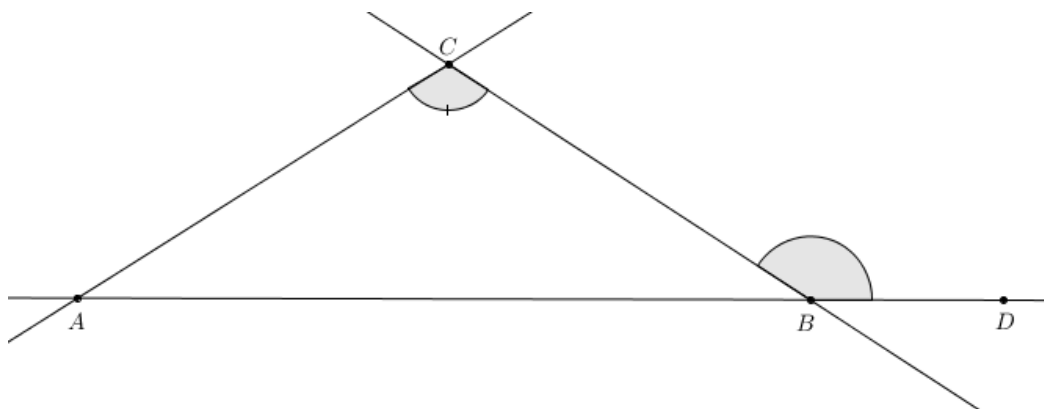


Figura 21. Teorema de ângulo externo

Sejam M o ponto médio do segmento de reta $[BC]$ e E o ponto da semirreta \overrightarrow{AM} tal que $\overline{AM} = \overline{ME}$.

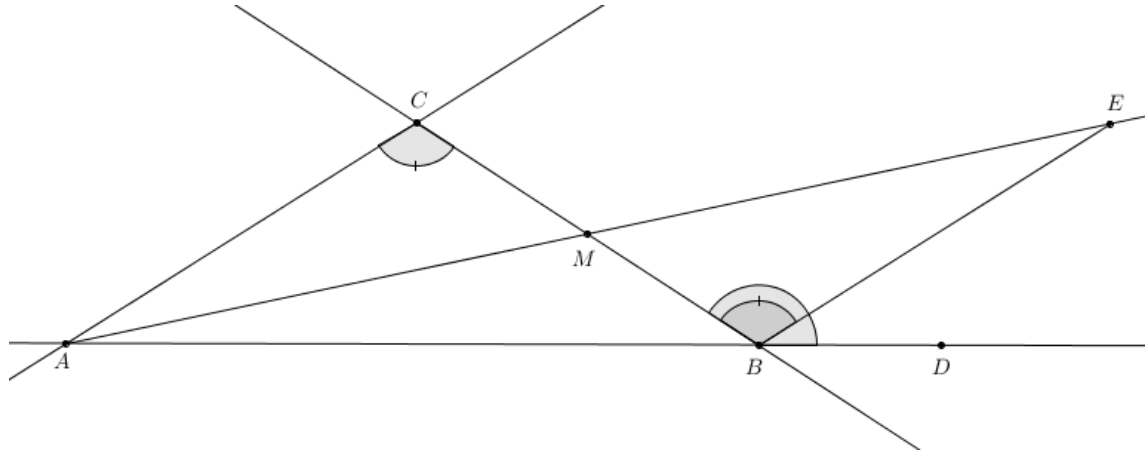


Figura 22. Esquema auxiliar à prova do Teorema de ângulo externo

Pela Proposição 3, os ângulos verticalmente opostos AMC e BME são congruentes. Uma vez que $\overline{AM} = \overline{ME}$, $\overline{BM} = \overline{CM}$ e $\widehat{AMC} = \widehat{BME}$, pelo Axioma 12 (caso *LAL* de congruência de triângulos), podemos concluir que os triângulos $[ACM]$ e $[EBM]$ são congruentes. Consequentemente, $\widehat{ACB} = \widehat{EBC}$. Como E pertence ao interior do ângulo DBC , pelo Axioma 11, verifica-se que

$$\widehat{DBC} = \widehat{DBE} + \widehat{EBC}.$$

Donde, $\widehat{DBC} > \widehat{ACB}$.

De modo semelhante se pode mostrar que $\widehat{DBC} > \widehat{BAC}$. ■

Corolário 1.

A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor que 180° .

Prova. Sejam $[ABC]$ um triângulo e α o ângulo externo deste triângulo em C .

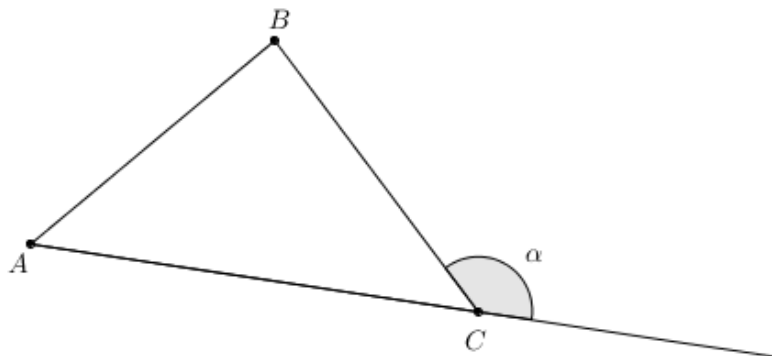


Figura 23. $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} < 180^\circ$

Pelo Teorema do ângulo externo, temos que $\alpha > \widehat{ABC}$. Como o ângulo externo α e o ângulo ACB são suplementares, tem-se $\alpha + \widehat{ACB} = 180^\circ$. Logo,

$$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} < \alpha + \widehat{BCA} = 180^\circ.$$

Analogamente se mostraria o resultado para outros dois pares de ângulos. ■

Corolário 2.

Todo triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos.

Prova. Se um triângulo possuísse dois ângulos não agudos, a sua soma seria maior ou igual a 180° , o que contrariaria o Corolário 1. ■

Definição. Se um ponto é comum a duas retas, dizemos que este ponto é um *ponto de interseção* dessas retas.

Definição. Duas retas são *concorrentes* se têm um único ponto comum; se formarem um ângulo reto dizem-se *concorrentes perpendiculares* e o ponto de interseção das duas designa-se por *pé da perpendicular*; caso contrário dizem-se *concorrentes oblíquas*.

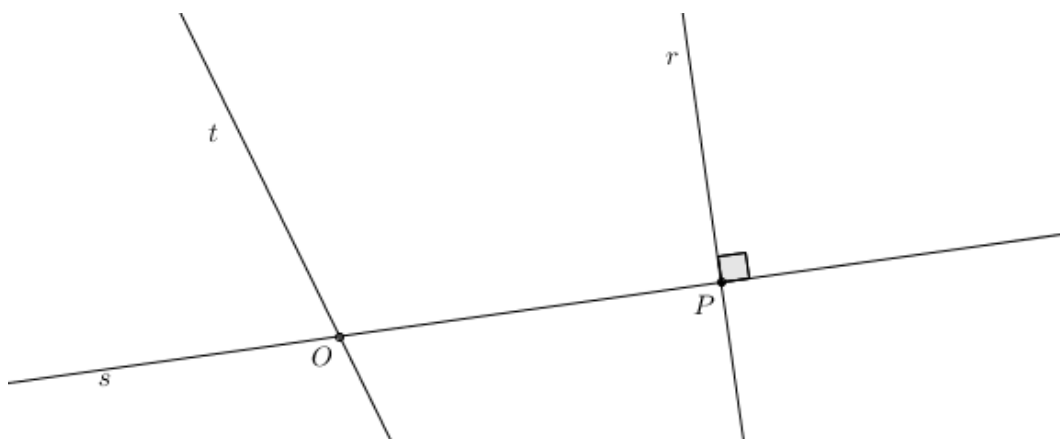


Figura 24. Retas t e s são concorrentes oblíquas; retas r e s são concorrentes perpendiculares

Usamos a notação $r \perp s$ quando as retas r e s são perpendiculares.

Corolário 3.

Se duas retas distintas são perpendiculares a uma terceira, então não se intersectam.

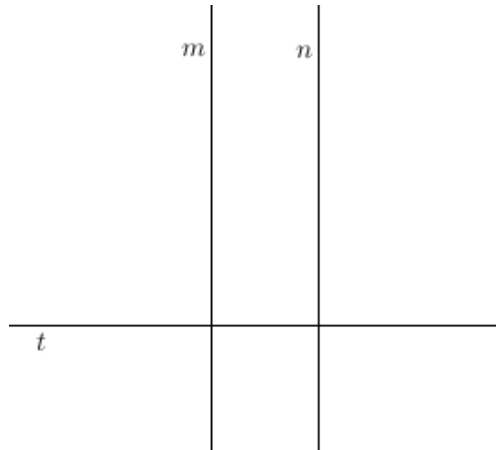


Figura 25. $m \perp t$ e $n \perp t$; m e n não se intersectam

Prova. Consideremos as retas m e n distintas e perpendiculares a t . Se m e n se intersectassem num só ponto, teríamos um triângulo com dois ângulos internos retos, o que é impossível, atendendo ao Corolário 2. Então, pela Proposição 1, as retas m e n não se intersectam. ■

Definição. *Transversal* ou *secante* a duas retas coplanares distintas é qualquer reta com estas coplanar e que as intersecta.

Quando duas retas distintas são intersectadas por uma secante formam-se oito ângulos; os quatro ângulos compreendidos entre as duas retas chamam-se *internos*; os outros quatro chamam-se *externos*. Estes ângulos agrupam-se dois a dois aos quais são atribuídas designações conforme a sua posição em relação à secante e às outras retas.

Assim, temos:

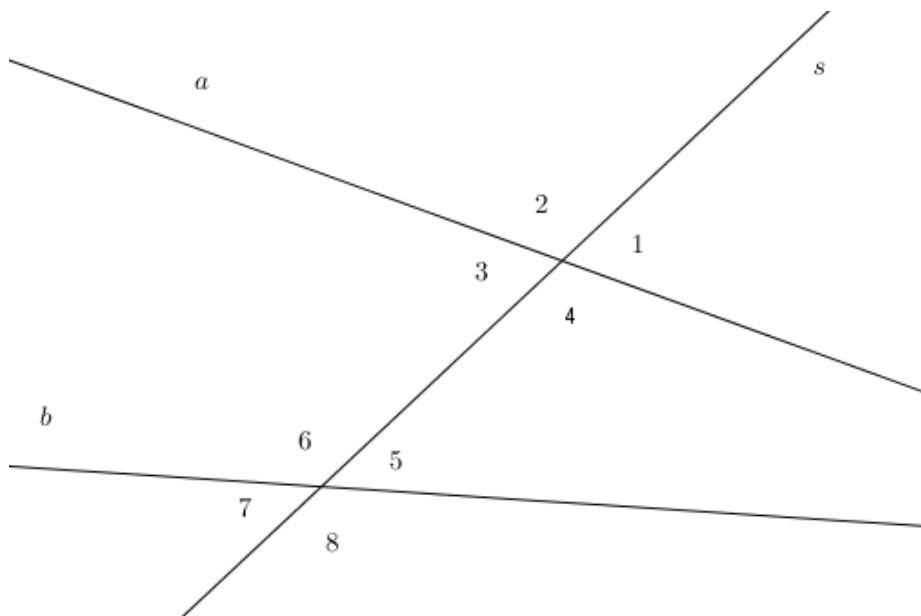


Figura 26. Duas retas concorrentes intersectadas por uma secante formam oito ângulos

Ângulos alternos internos – dois ângulos situados um de cada lado da secante, no interior das retas e não adjacentes: 4 e 6, 3 e 5.

Ângulos alternos externos – dois ângulos situados um de cada lado da secante, no exterior das retas e não adjacentes: 1 e 7, 2 e 8.

Ângulos correspondentes – dois ângulos situados do mesmo lado da secante, um interno outro externo e não adjacentes: 1 e 5, 2 e 6; 3 e 7, 4 e 8.

Ângulos internos do mesmo lado – dois ângulos situados do mesmo lado da secante e no interior das retas: 3 e 6, 4 e 5.

Ângulos externos do mesmo lado – dois ângulos situados do mesmo lado da secante e no exterior das retas: 1 e 8, 2 e 7.

A hipótese do Corolário 3 pode ser substituída pela hipótese, mais geral, da interseção das duas retas por uma secante determinar ângulos correspondentes congruentes, não necessariamente retos.

Corolário 4.

Se, ao intersetarmos duas retas distintas com uma secante, os ângulos correspondentes, os ângulos alternos internos ou os ângulos alternos externos são congruentes, então as retas não se interseam.

Prova. Sejam m e m_1 as retas representadas na figura, intersetadas por uma secante, determinando ângulos correspondentes CAP e ABP congruentes.

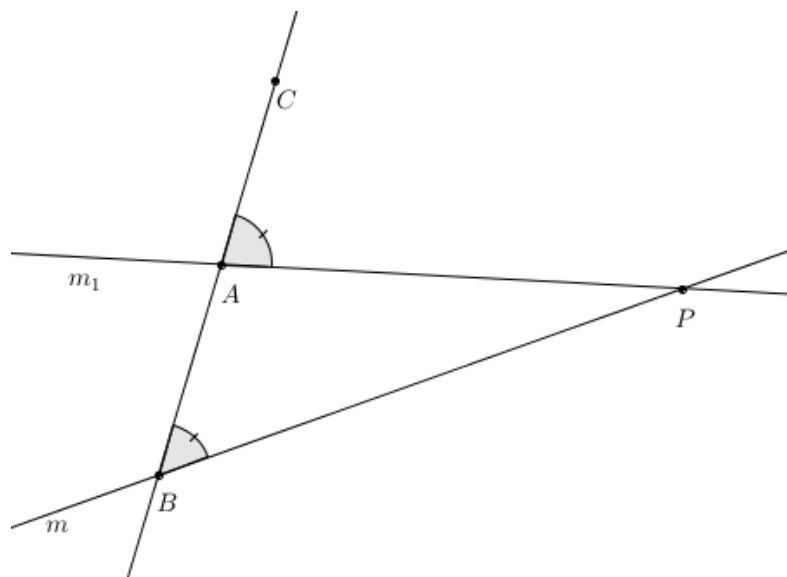


Figura 27. Esquema auxiliar à prova do Corolário 4

Se m intersetasse m_1 num só ponto P , como indica a figura, teríamos o triângulo $[ABP]$. Neste triângulo, CAP é um ângulo externo e ABP é um ângulo interno não adjacente ao ângulo CAP . Assim, pelo Teorema do ângulo externo, teríamos que $\widehat{CAP} \neq \widehat{ABP}$, o que contradiz a nossa hipótese.

Portanto, pela Proposição 1, m e m_1 não se interseam.

Se m e m_1 determinassem ângulos alternos internos (ou ângulos alternos externos) congruentes, quando intersetadas pela secante, substituindo um destes ângulos pelo que lhe é verticalmente oposto, obtêm-se, pela Proposição 3, ângulos correspondentes congruentes.

Provámos acima que, nesse caso, as retas m e m_1 não se interseam. ■

1.1.5. Axioma das Paralelas

Definição. Duas retas são *paralelas* se são coincidentes ou são coplanares e não têm ponto comum.

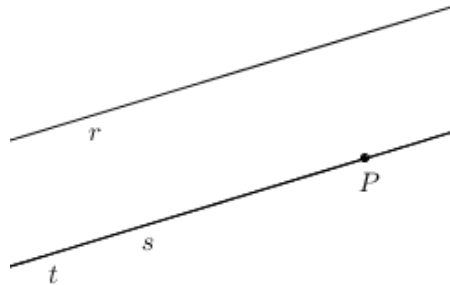


Figura 28. Retas r e s paralelas; retas s e t coincidentes

Escreve-se $r \parallel s$ quando r e s são retas paralelas.

Axioma 13. (Axioma das Paralelas)

Dados uma reta s e um ponto P fora dela, existe uma única reta r paralela à reta dada, passando pelo ponto dado.

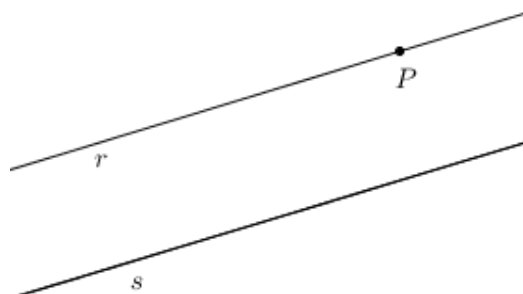


Figura 29. Axioma das Paralelas: r contém P e $r \parallel s$

Com a introdução do Axioma das Paralelas ou de Euclides surgiu uma axiomática mais completa, conhecida como *Geometria Euclidiana*.

O mais famoso postulado de Euclides, conhecido como Quinto Postulado, afirma que se duas retas num plano, intersectadas por uma terceira, determinam com esta ângulos internos do mesmo lado da secante cuja soma é inferior a um ângulo raso, então as duas retas intersectam-se no semiplano determinado pela secante que contém esses dois ângulos. Este postulado é equivalente ao Axioma das Paralelas

e gerou muita controvérsia. Muitos matemáticos tentaram, ao longo da história, demonstrar que se tratava de um axioma essencial e independente dos outros axiomas, mas só no século XIX é que alguns matemáticos, entre eles Lobachevski², conseguiram essa proeza.

De facto, é possível construir teorias modificando determinadas axiomáticas da Geometria Euclidiana, substituindo o Quinto Postulado pela sua negação, designando-se estas teorias por *Geometrias não-Euclidianas*. No caso de não haver outra alteração à axiomática original, para além desta substituição, obtém-se a *Geometria Hiperbólica* ou *de Lobachevski* que expõe que “por um ponto exterior a uma reta, podemos traçar uma infinidade de paralelas a esta reta”. Chegou-se, então, à conclusão que, substituindo o Axioma das Paralelas, era possível construir outra Geometria, distinta da Euclidiana, identicamente lógica e aceitável.

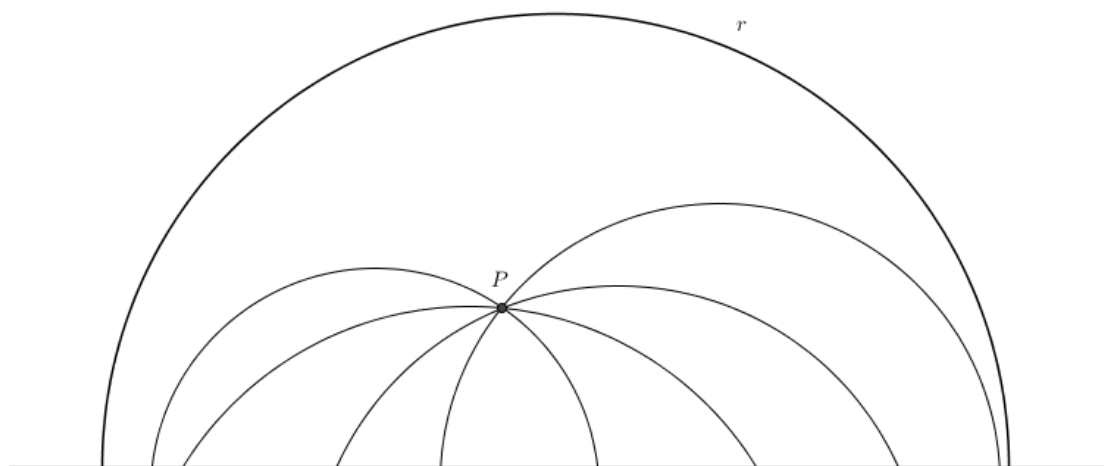


Figura 30. Infinitude de retas paralelas a r , contendo o ponto P

1.1.6. Posição relativa de retas no plano

Proposição 4.

Se uma reta que intersesta uma de outras duas retas paralelas é com elas complanar, então intersesta a outra.

² Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) foi um matemático russo. Estudou no Instituto de Kazan, a partir de 1802, destacando-se, desde cedo, pelo seu gosto pela Matemática.

Prova. Consideremos duas retas paralelas, m e m_1 , e uma reta n coplanar com m e m_1 e que interseca a reta m no ponto P .

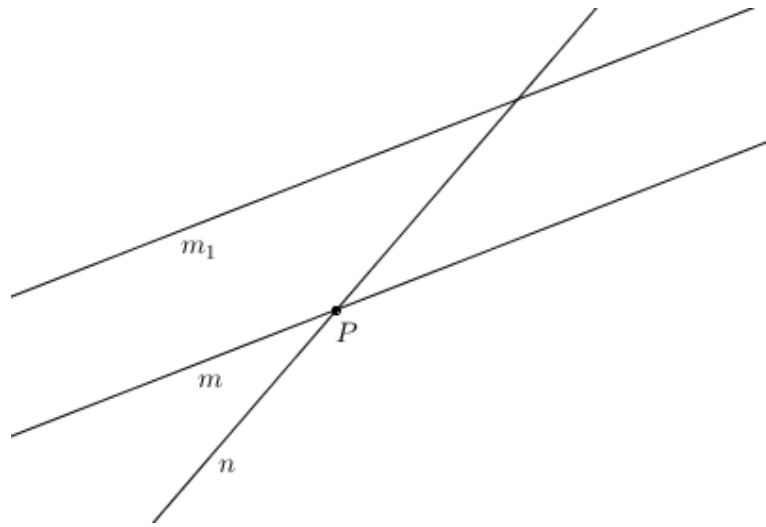


Figura 31. n interseca as retas paralelas m e m_1

Pelo Axioma 13, existe uma única reta paralela à reta m_1 e que passa em P . Como m é paralela a m_1 e passa em P , a reta n , distinta de m , não pode ser paralela a m_1 , pelo que, sendo com ela coplanar, interseca-a. ■

Proposição 5.

Se uma reta é paralela a outras duas retas, então essas duas retas são paralelas.

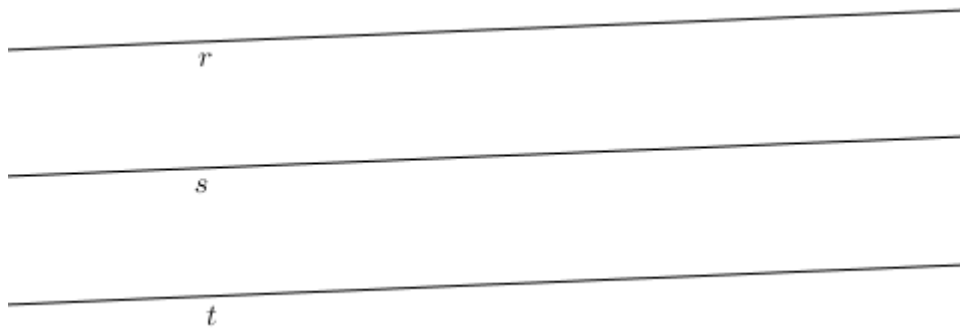


Figura 32. $r // s$ e $r // t$, logo $s // t$

Prova. Suponhamos que as retas s e t são paralelas, não coincidentes, à reta r . Se s e t não fossem paralelas entre si teriam um ponto em comum. Seja P esse ponto. Mas, assim, s e t seriam retas paralelas distintas à reta r passando por P , o que contradiz o Axioma 13. Logo s e t são paralelas. ■

O resultado a seguir apresentado é o recíproco do Corolário 4 do Teorema do ângulo externo.

Proposição 6.

Duas retas paralelas intersectadas por uma transversal determinam ângulos correspondentes congruentes (bem como ângulos alternos internos congruentes e ângulos alternos externos congruentes).

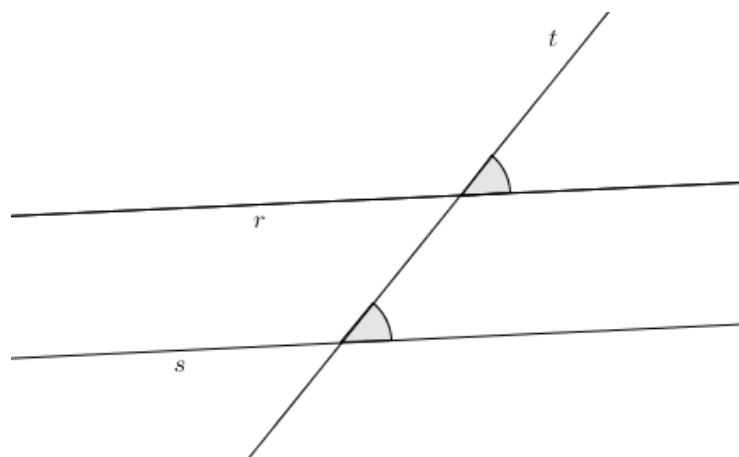


Figura 33. A transversal t intersecta as retas paralelas s e r

Prova. Sejam r e s duas retas paralelas e t uma reta que as intersecta nos pontos A e B , respectivamente.

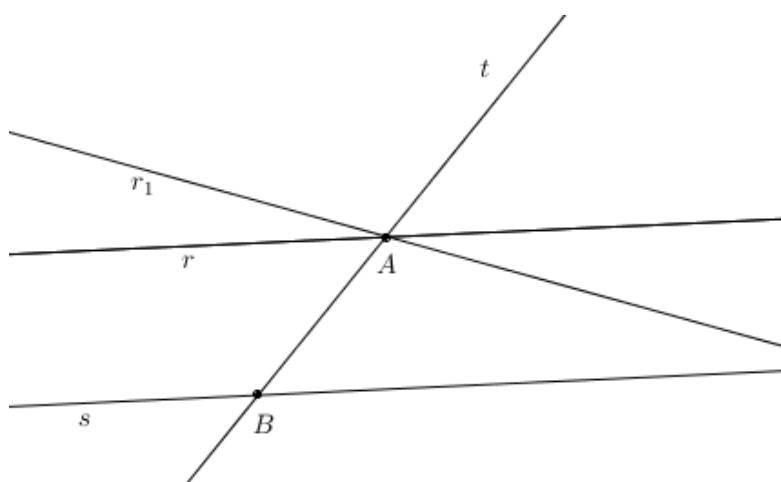


Figura 34. Esquema auxiliar à prova da Proposição 6

Consideremos uma reta r_1 , passando por A , formando com t quatro ângulos congruentes aos ângulos correspondentes formados por s e t . Pelo Corolário 4 do

Teorema do ângulo externo, r_1 e s são retas paralelas. Pelo Axioma 13, existe uma única reta paralela a s e passando pelo ponto A , logo r e r_1 são coincidentes. Portanto, a reta r forma com t ângulos congruentes aos correspondentes formados por s e t .

Mas, pela Proposição 3, ângulos verticalmente opostos são congruentes.

Assim, se em cada par de ângulos correspondentes, determinados pelas retas paralelas intersectadas pela secante, substituirmos o ângulo externo (interno) pelo verticalmente oposto a este, obtém-se um par de ângulos alternos internos (externos, respetivamente) congruentes. ■

Podemos imediatamente concluir da Proposição 6 que duas retas paralelas intersectadas por uma transversal determinam ângulos internos do mesmo lado suplementares e ângulos externos do mesmo lado suplementares.

Proposição 7.

Por qualquer ponto de uma reta passa uma única reta perpendicular à dada.

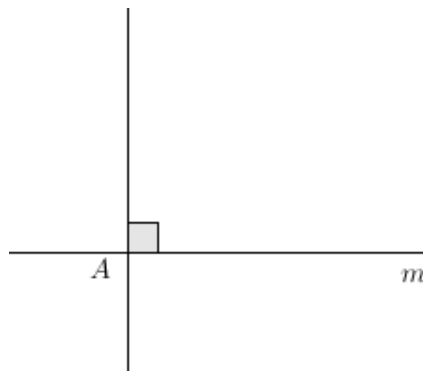


Figura 35. Reta perpendicular a m passando por A

Prova. Sejam m uma reta e A um ponto sobre ela. As duas semirretas determinadas por A formam um ângulo raso.

Consideremos um dos semiplanos determinados pela reta m . De acordo com o Axioma 10, entre todas as semirretas com origem em A que dividem o semiplano fixado, existe uma que corresponderá ao número 90. Esta semirreta forma ângulos

de 90° com as duas semirretas determinadas pelo ponto A sobre a reta m . Portanto, ela é perpendicular à reta m .

Provemos agora que essa reta é única. Sejam n e n' duas retas que passam por A e perpendiculares a m .

Fixemos um dos semiplanos determinados por m . As interseções das retas n e n' com este semiplano são semirretas que formam, por exemplo, um ângulo α e formam outros dois ângulos β e γ com as semirretas determinadas pelo ponto A em m .

Como n e n' são perpendiculares a m , então $\beta = \gamma = 90^\circ$. Por outro lado, devemos ter $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

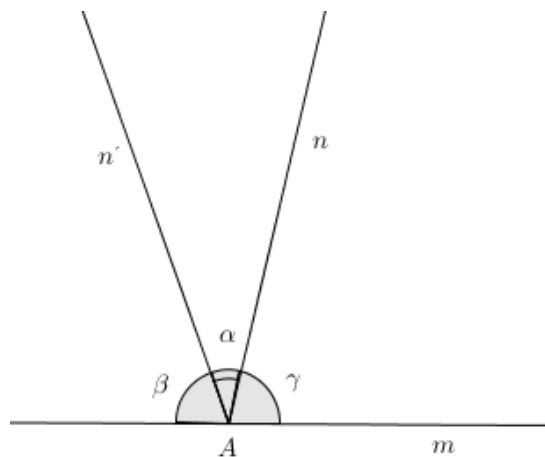


Figura 36. Esquema auxiliar à Proposição 7

Logo, $\alpha = 0^\circ$ e as retas n e n' coincidem. ■

1.1.7. Soma dos ângulos internos de um triângulo

Proposição 8.

A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso.

Prova. Consideremos o triângulo $[ABC]$ da figura.

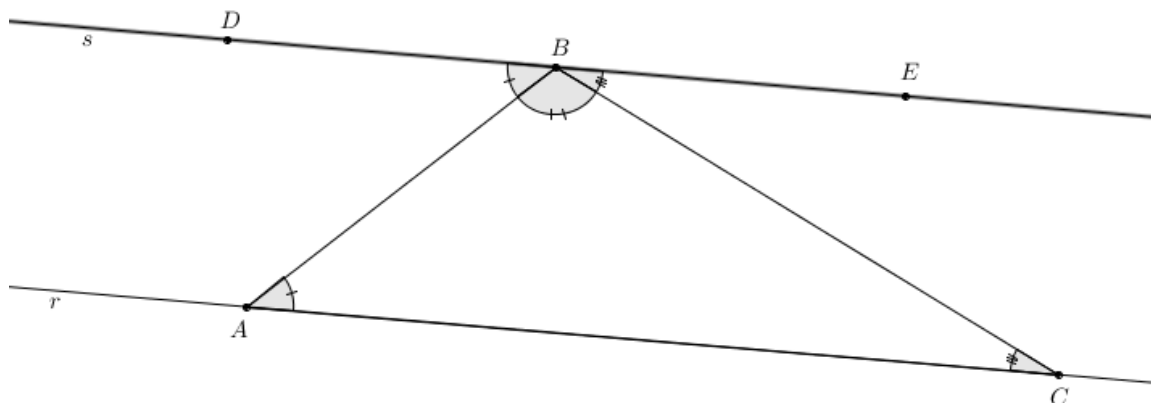


Figura 37. Soma dos ângulos internos de um triângulo

Pelo Axioma das Paralelas, existe uma única reta paralela à reta AC , passando por B .

Pela Proposição 6, estas duas retas paralelas, sendo intersectadas pela reta transversal AB , determinam ângulos alternos internos congruentes.

Considerando os pontos D e E pertencentes à reta paralela a AC , como na figura, verifica-se que os ângulos interno BAC e externo DBA do triângulo são congruentes.

Analogamente, os ângulos ACB e EBC também são congruentes.

Por observação da figura

$$\widehat{DBA} + \widehat{CBA} + \widehat{EBC} = 180^\circ,$$

pelo que a soma dos três ângulos internos do triângulo, quando adjacentes, formam um ângulo raso. ■

1.2. Congruência, Teorema de Tales e semelhança

A Geometria está em toda parte. No nosso cotidiano deparamo-nos, facilmente, com muitas e variadas figuras que nos parecem iguais ou semelhantes. É com alguma frequência que falamos em ampliações, reduções ou simetrias.

O Panteão Nacional, Museu Nacional da Arqueologia e Museu de Alcobaça são exemplos de grandes monumentos nacionais com arquitetura simétrica. Também

as cem grandiosas pirâmides do Egito são exemplo disso. A pirâmide de Quéops é a maior e mais conhecida de todas e foi construída por volta de 2500 a.C.. A sua base é um quadrado, com cerca de 230 m de comprimento de lado, e a sua altura é aproximadamente 150 m.

Tales, matemático, professor, astrónomo e filósofo grego, nascido na cidade de Mileto por volta de 540 a.C., ficou conhecido como um dos sete sábios da antiga Grécia. Tales contribuiu muito para a compreensão das relações de proporcionalidade geométrica e, a esse propósito, ficou famosa a história de que os egípcios teriam pedido a Tales que calculasse a altura da pirâmide de Quéops. Este grandioso matemático conseguiu medir a referida altura, partindo do princípio que existia uma razão entre a altura de um objeto e o comprimento da sombra que esse objeto projeta no chão.

Definição. Um *polígono de n lados* ou *n -ágono* $[A_1A_2 \dots A_n]$, $n > 2$, é uma figura geométrica formada por um número finito de pontos A_1, A_2, \dots, A_n , chamados *vértices*, e pelos segmentos $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ..., $[A_{n-1}A_n]$, $[A_1A_n]$, chamados *lados do polígono*, satisfazendo as seguintes propriedades:

- i. Os lados interseitam-se somente nas suas extremidades;
- ii. Dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Uma *diagonal de um polígono* é um segmento que tem por extremidades dois dos seus vértices que não pertencem a um mesmo lado.

Definição. Um polígono é chamado *convexo* se ele está sempre contido num dos semiplanos determinados pelas retas que contêm os seus lados.

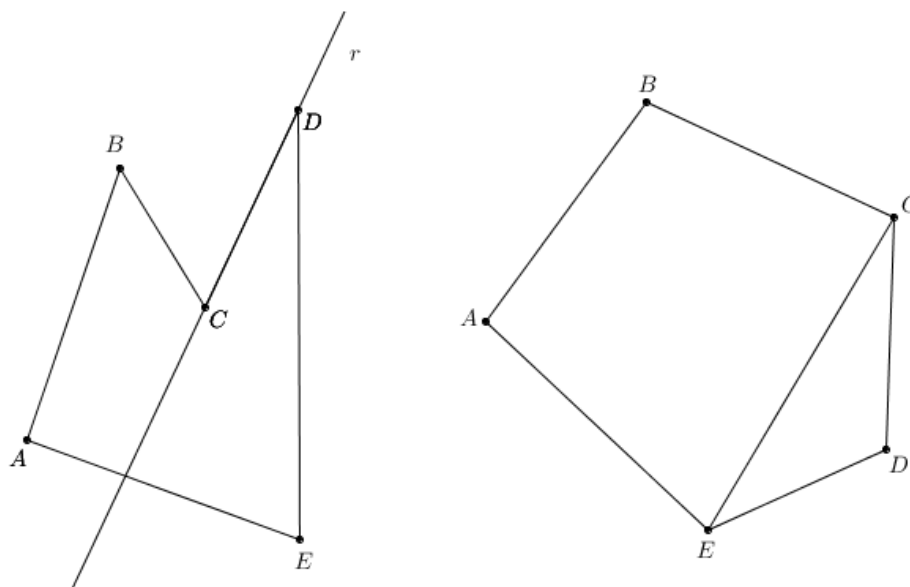


Figura 38. Polígono não convexo; polígono convexo de vértices A , B , C , D e E e diagonal $[CE]$

Definição. Os ângulos convexos formados por dois lados consecutivos de um polígono convexo dizem-se *ângulos internos do polígono* ou simplesmente *ângulos do polígono*; os ângulos formados pelos lados do polígono com os prolongamentos dos lados adjacentes dizem-se *ângulos externos do polígono*.

Definição. Um *polígono regular* é um polígono convexo no qual todos os lados são congruentes entre si e, também, todos os ângulos internos são congruentes entre si.

Os polígonos podem classificar-se quanto ao número de lados. É claro que um triângulo é um polígono de três lados.

A seguir apresentam-se outras nomenclaturas que comumente se empregam:

Quadrilátero - polígono de 4 lados;

Pentágono - polígono de 5 lados;

Hexágono - polígono de 6 lados;

Heptágono - polígono de 7 lados;

Octógono - polígono de 8 lados;

Eneágono - polígono de 9 lados;

Decágono - polígono de 10 lados;

Undecágono - polígono de 11 lados;

Dodecágono - polígono de 12 lados.

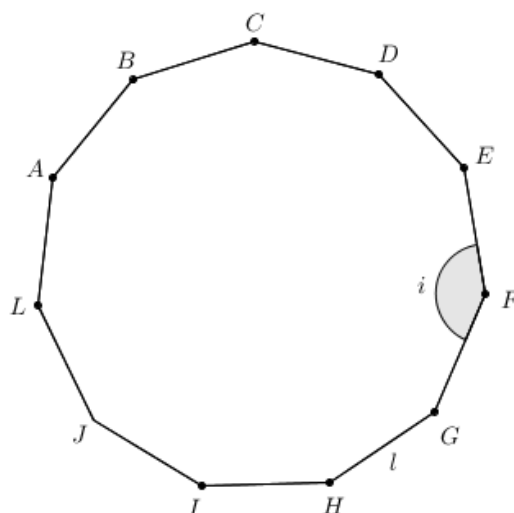


Figura 39. Undecágono regular de lado l e ângulo interno i

Observação. Dois polígonos são *congruentes* se os lados correspondentes (ou *homólogos*) forem congruentes e os ângulos correspondentes (*homólogos*) forem congruentes.

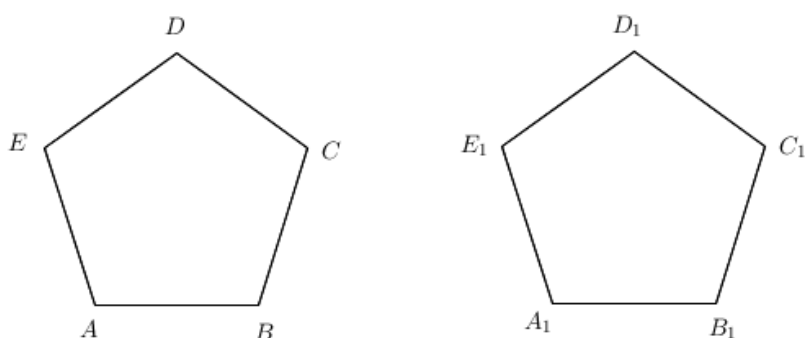


Figura 40. Polígonos congruentes

1.2.1. Critérios de congruência de triângulos

O primeiro critério de congruência de triângulos é o critério *LAL* apresentado no Axioma 12. Apresentaremos, de seguida, os outros dois critérios de congruência de triângulos.

Proposição 9. (2.º caso de congruência de triângulos)

Dados dois triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$, tais que $[AC] \cong [DF]$, $\angle BAC \cong \angle EDF$ e $\angle ACB \cong \angle DFE$, então $[ABC] \cong [DEF]$.

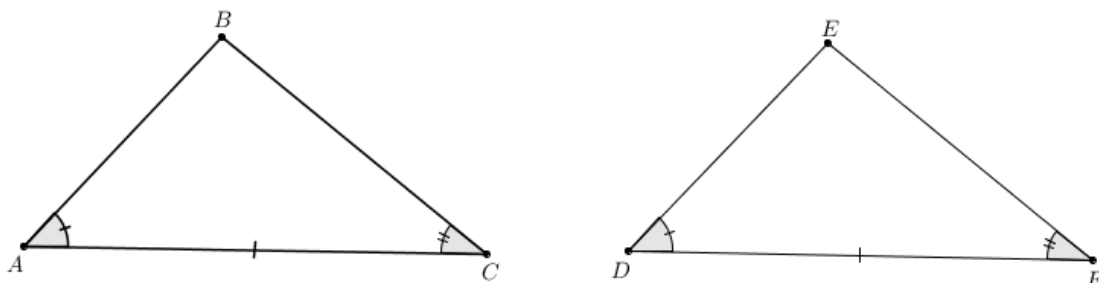


Figura 41. 2.º caso de congruência de triângulos

Prova. Sejam $[ABC]$ e $[DEF]$ dois triângulos, tais que $[AC] \cong [DF]$, $\angle BAC \cong \angle EDF$ e $\angle ACB \cong \angle DFE$. Seja G um ponto da semirreta $\hat{A}B$, tal que $[AG] \cong [DE]$.

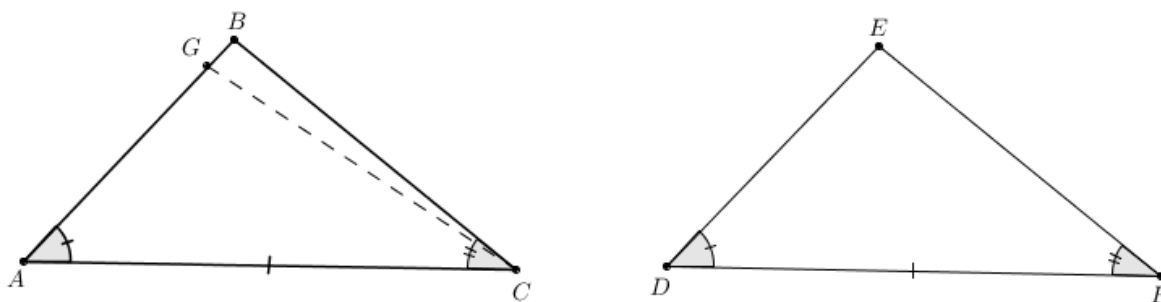


Figura 42. Esquema auxiliar à prova da Proposição 9

Consideremos o triângulo $[ACG]$ e vamos compará-lo ao triângulo $[DEF]$. Como $[AC] \cong [DF]$, $[AG] \cong [DE]$ e $\angle BAC \cong \angle EDF$, concluímos, pelo critério de congruência *LAL*, Axioma 12, que $[ACG] \cong [DEF]$. Como consequência, temos que $\angle ACG \cong \angle DFE$. Mas, por hipótese, $\angle DFE \cong \angle ACB$, logo $\angle ACG \cong \angle ACB$. Claro que $\angle BAC \cong \angle GAC$ e, sendo $[AC]$ um lado comum a $[ACG]$ e $[ABC]$, pelo Axioma 12, tem-se $[ACG] \cong [ABC]$. Consequentemente, as semirretas $\hat{C}G$ e $\hat{C}B$ coincidem. Assim, o ponto G coincide com o ponto B e, portanto, os triângulos $[ACG]$ e $[ABC]$ também coincidem. Deste modo, podemos afirmar que $[ABC] \cong [DEF]$. ■

O resultado apresentado anteriormente é conhecido como *critério de congruência de triângulos ALA*.

Num triângulo isósceles, temos dois lados congruentes chamados *laterais* e ao terceiro lado chama-se *base*.

Proposição 10.

Um triângulo é isósceles se, e somente se, possui dois ângulos congruentes.

Prova. Suponhamos que $[ABC]$ é um triângulo isósceles de laterais $[AB]$ e $[AC]$. Pretendemos mostrar que os ângulos adjacentes à base $[BC]$ são congruentes, isto é, que $\angle ABC \cong \angle ACB$.

Seja $[DEF]$ um triângulo, tal que $D = A$, $E = C$ e $F = B$.

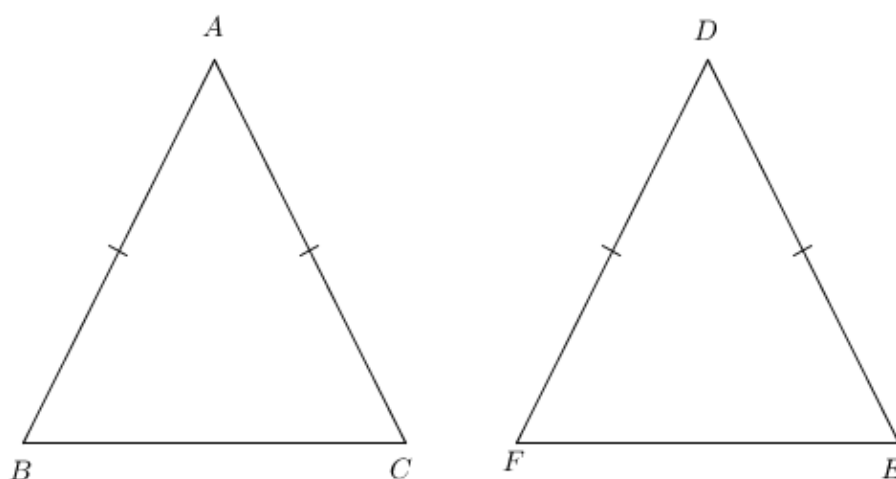


Figura 43. Triângulo isósceles e respectivos lados congruentes.

Como $\overline{AB} = \overline{AC}$, então $[AB] \cong [DE]$, $[AC] \cong [DF]$ e $\angle BAC \cong \angle FDE$. Pelo 1.º caso de congruência de triângulos, Axioma 12, tem-se $[ABC] \cong [DEF]$.

Portanto, $\angle ABC \cong \angle DEF$; mas o ângulo DEF é precisamente o ângulo ACB .

Reciprocamente, suponhamos que $[ABC]$ possui dois ângulos congruentes, digamos $\angle ABC \cong \angle ACB$.

Vamos mostrar que $[ABC]$ é isósceles.

Seja $[DEF]$ um triângulo com $D = A$, $E = C$ e $F = B$.

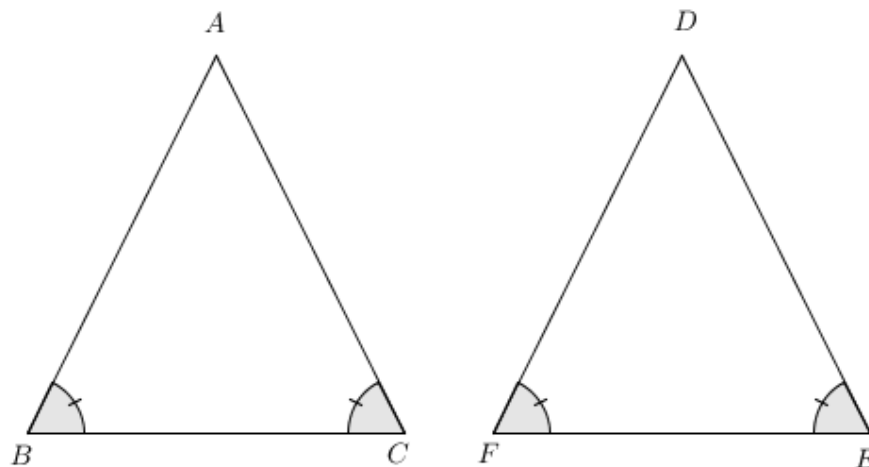


Figura 44. Triângulo isósceles e respectivos ângulos congruentes.

Então $[BC] \cong [FE]$. Além disso, $\angle ABC \cong \angle DFE$ e $\angle ACB \cong \angle DEF$. Pelo 2.º caso de congruência de triângulos, Proposição 9, tem-se que $[ABC] \cong [DEF]$.

Assim, $\overline{AB} = \overline{DE} = \overline{AC}$, isto é, o triângulo $[ABC]$ é isósceles. ■

Efetivamente, na primeira parte da prova anterior, demonstrámos que os ângulos adjacentes à base de um triângulo isósceles são congruentes.

Proposição 11. (3.º caso de congruência de triângulos).

Dados dois triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$, se $[AB] \cong [DE]$, $[AC] \cong [DF]$ e $[CB] \cong [FE]$, então $[ABC] \cong [DEF]$.

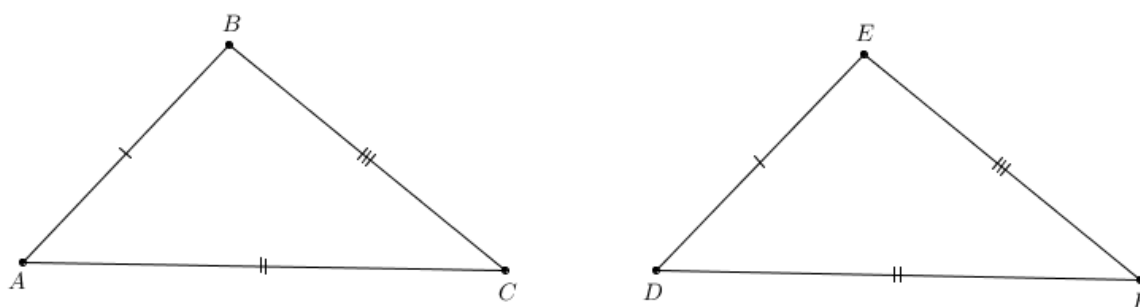


Figura 45. 3.º caso de congruência de triângulos

Prova. Sejam $[ABC]$ e $[DEF]$ dois triângulos, tais que $[AB] \cong [DE]$, $[AC] \cong [DF]$ e $[CB] \cong [FE]$.

Construamos, a partir da semirreta \overrightarrow{AC} e no semiplano oposto ao que contém o ponto B , um ângulo congruente ao $\angle EDF$. No lado desse ângulo, que não contém

o ponto C , marquemos um ponto G , tal que $[AG] \cong [DE]$ e consideremos o triângulo $[AGC]$.

Como, por hipótese, $[AC] \cong [DF]$ e, por construção, $[AG] \cong [DE]$ e $\angle GAC \cong \angle FDE$, pelo critério de congruência LAL , Axioma 12, temos que $[AGC] \cong [DEF]$.

Tracemos, agora, o segmento $[BG]$.

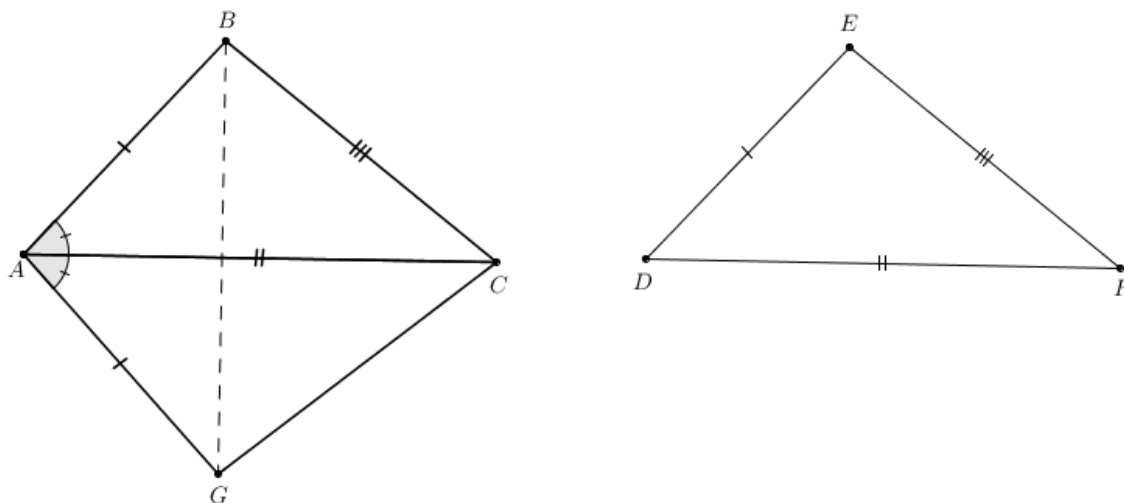


Figura 46. Esquema auxiliar à prova da Proposição 11

Como $[AG] \cong [DE] \cong [AB]$ e $[GC] \cong [FE] \cong [CB]$, temos que os triângulos $[AGB]$ e $[BGC]$ são isósceles de base $[BG]$.

Provamos na Proposição 10 que, num triângulo isósceles, os ângulos adjacentes à base são congruentes. Segue-se que $\angle AGB \cong \angle ABG$ e $\angle BGC \cong \angle CBG$ e, por conseguinte, $\angle AGC \cong \angle ABC$. Assim, pelo 1.º caso de congruência de triângulos, Axioma 12, podemos concluir que $[AGC] \cong [ABC]$. Como já tínhamos provado que $[AGC] \cong [DEF]$, concluímos que $[ABC] \cong [DEF]$. ■

Esta proposição é vulgarmente chamada de *critério de congruência de triângulos LLL*.

1.2.2. Teorema de Tales

Definição. Dois segmentos de reta são *proporcionais* a dois outros segmentos se a razão entre as medidas dos comprimentos dos dois primeiros é igual à razão

entre as medidas dos comprimentos dos outros dois.

Definição. Dois segmentos de reta dizem-se *paralelos* se estão contidos em duas retas paralelas.

Definição. A *altura* de um triângulo relativa à base é a distância entre um vértice e a reta suporte do lado oposto, lado este a que chamamos *base*.

Teorema de Tales no triângulo

Toda a reta paralela a um lado de um triângulo determina sobre os outros dois lados, quando por ela intersectados, segmentos proporcionais.

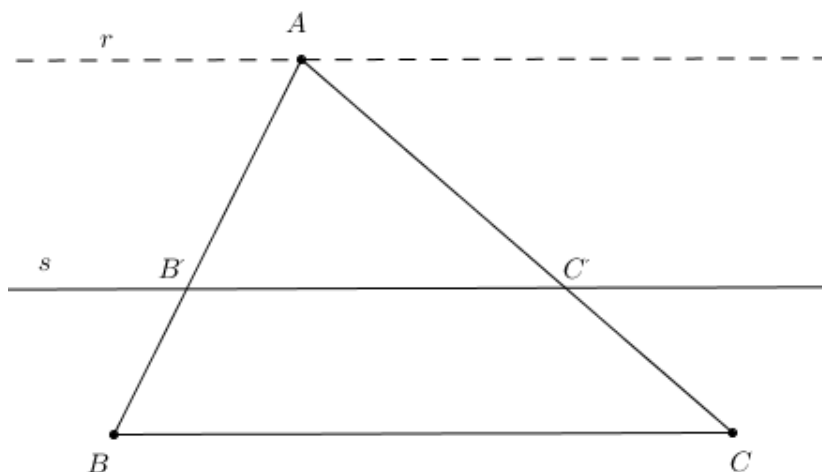


Figura 47. Teorema de Tales no triângulo

Prova. Consideramos o triângulo $[ABC]$ e uma reta paralela a um dos seus lados, digamos $[BC]$, intersectando os outros dois lados, $[AB]$ e $[AC]$, nos pontos B' e C' , respetivamente.

Pretendemos mostrar a igualdade:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}.$$

Consideremos a figura seguinte:

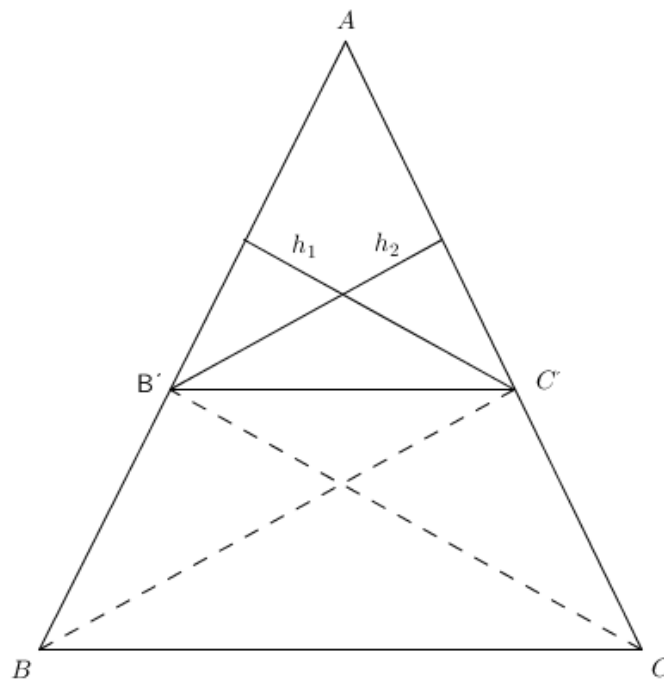


Figura 48. Esquema auxiliar à prova do Teorema de Tales no triângulo

Se $[B'C']$ é paralelo a $[BC]$, então os triângulos $[B'C'B]$ e $[B'C'C]$ têm a mesma área, porque têm a mesma base $[B'C']$ e alturas relativas a essa base iguais. Acrescentando a esses triângulos o triângulo $[AB'C']$, concluímos que os triângulos $[ABC']$ e $[AB'C]$ também detêm a mesma área. Se dois triângulos possuem a mesma altura (h_1 é a altura relativa à base $[AB']$ do triângulo $[AB'C']$ e relativa à base $[AB]$ do triângulo $[ABC']$; h_2 é a altura relativa à base $[AC]$ do triângulo $[AB'C]$ e relativa à base $[AC']$ do triângulo $[AB'C']$), então a razão entre suas áreas é igual à razão entre a medida do comprimentos das suas bases, logo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{A_{[ABC']}}{A_{[AB'C]}} = \frac{A_{[AB'C]}}{A_{[AB'C']}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}.$$

■

Teorema de Tales

Se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre os comprimentos de quaisquer dois segmentos determinados numa das transversais é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes da outra transversal.

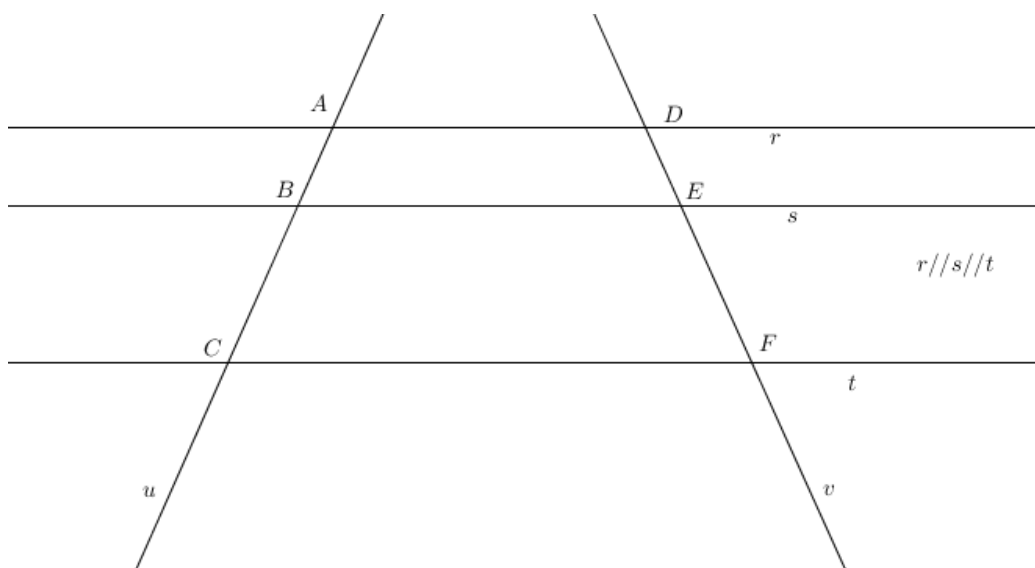


Figura 49. Retas transversais cortadas por um feixe de retas paralelas

De acordo com a figura, destacam-se as seguintes razões:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{EF}}, \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{DE}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}.$$

Prova. Consideremos a figura anterior e nela tracemos uma reta paralela à transversal u que intersesta a outra transversal no ponto D . Obtemos, assim, o triângulo $[DF'E]$.

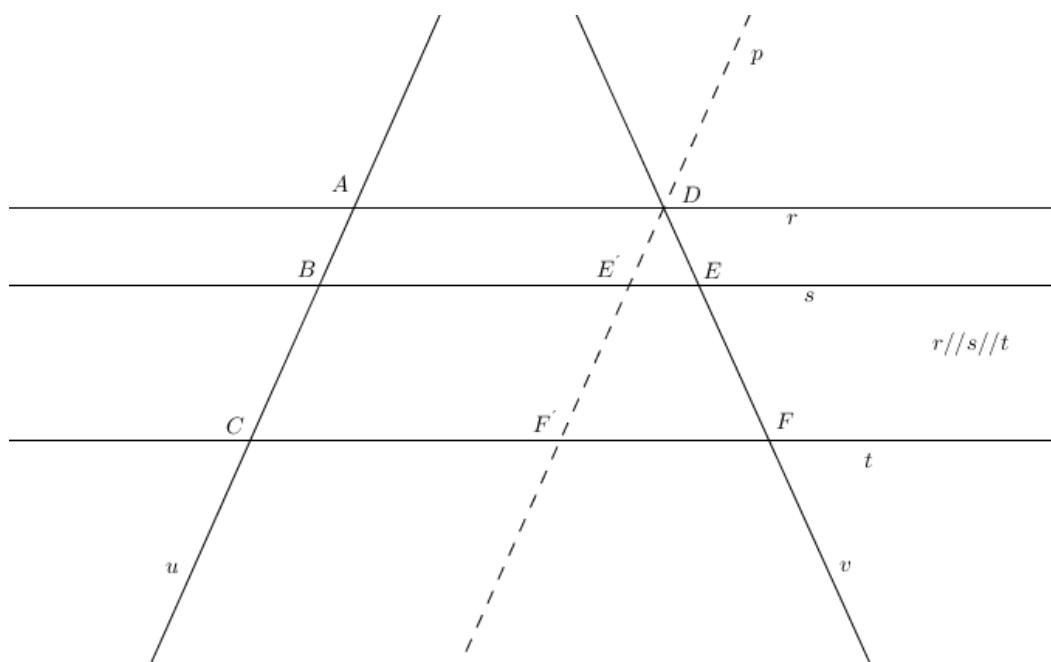


Figura 50. Esquema auxiliar à prova do Teorema de Tales

Pelo Teorema de Tales no triângulo, é válida a igualdade:

$$\frac{\overline{DF'}}{\overline{DE'}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{DE}}.$$

Mas $[ADBE']$ e $[ADCF']$ são paralelogramos (os lados opostos são paralelos, pois estão contidos em retas paralelas), logo os seus lados opostos são congruentes, pela Proposição 25³, pelo que a igualdade acima é equivalente a

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{DE}}.$$

Por um raciocínio análogo, podíamos mostrar as restantes igualdades entre as razões. ■

1.2.3. Critérios de semelhança de triângulos

Definição. Duas figuras (ou polígonos) são *semelhantes* quando os ângulos correspondentes são congruentes e a medida do comprimento dos segmentos, que unem quaisquer dois pontos de uma, é proporcional à medida do comprimento dos segmentos correspondentes na outra.

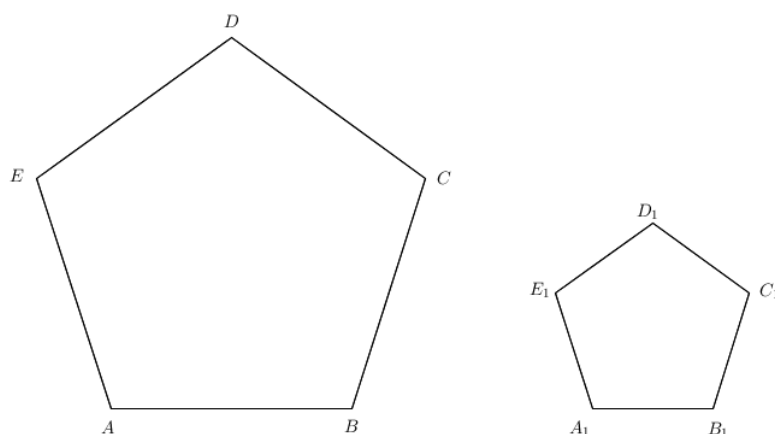


Figura 51. Polígonos semelhantes

Definição. *Razão de semelhança* é o quociente entre as medidas dos comprimentos de qualquer segmento da figura transformada e as medidas dos comprimentos do segmento correspondente da figura inicial.

³ Este resultado é apresentado na secção 1.3.2.

Numa *ampliação*, a razão de semelhança é um número maior do que 1.

Numa *redução*, a razão de semelhança é um número positivo menor do que 1.

Podemos dizer que duas figuras são semelhantes se uma é ampliação, ou redução, da outra ou se são congruentes.

Observamos que a relação de semelhança é uma relação de equivalência.

Proposição 12. (1.º critério de semelhança de triângulos)

Dados dois triângulos $[ABC]$ e $[EFG]$, se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então os triângulos são semelhantes.

Prova. Consideremos os triângulos $[ABC]$ e $[EFG]$ da figura.

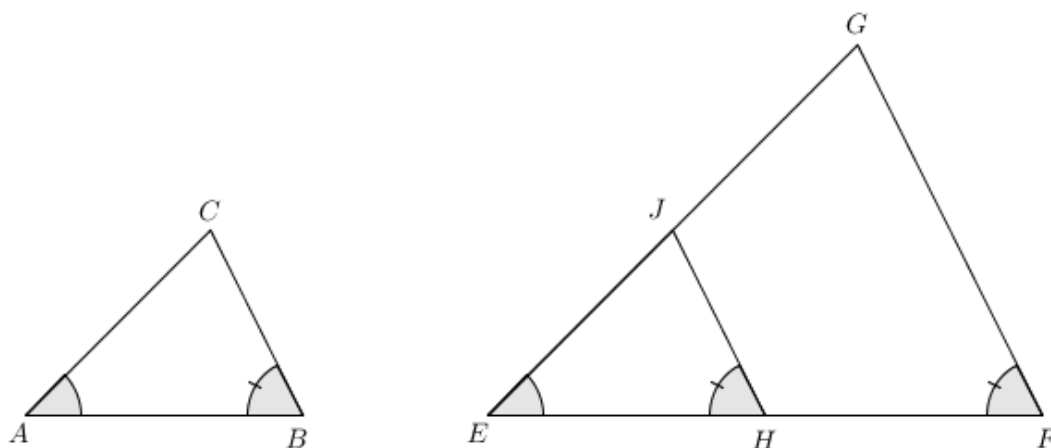


Figura 52. 1.º critério de semelhança de triângulos

Usando a Proposição 8, podemos afirmar que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{E} + \hat{F} + \hat{G}.$$

Como, por hipótese, $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, verificamos que $\hat{C} = \hat{G}$.

Resta-nos provar que os lados são proporcionais. Consideremos a semirreta \overrightarrow{EF} e o ponto H de modo que $\overline{EH} = \overline{AB}$. Pelo Axioma 13, existe uma só reta paralela a $[FG]$ que passa por H . Essa reta paralela irá interseccionar a semirreta \overrightarrow{EG} num ponto J , formando o triângulo $[EHJ]$ congruente ao triângulo $[ABC]$, pelo critério de congruência *ALA*, Proposição 9 (note-se que $\hat{B} = \hat{F} = \hat{EHJ}$).

Segue-se agora, pelo Teorema de Tales no triângulo, que

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EJ}}{\overline{EG}}.$$

Como $\overline{EH} = \overline{AB}$ e $\overline{EJ} = \overline{AC}$, então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}.$$

Analogamente, provaríamos que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{GF}}.$$

■

O caso de semelhança antes apresentado é conhecido como *critério de semelhança de triângulos AA*.

Proposição 13. (2.º critério de semelhança de triângulos)

Dados dois triângulos $[ABC]$ e $[EFG]$, se $\hat{A} = \hat{E}$ e

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}},$$

então os triângulos são semelhantes.

Prova. Começemos por construir um triângulo $[HIJ]$ de modo que $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\hat{H} = \hat{A}$ e $\hat{I} = \hat{B}$.

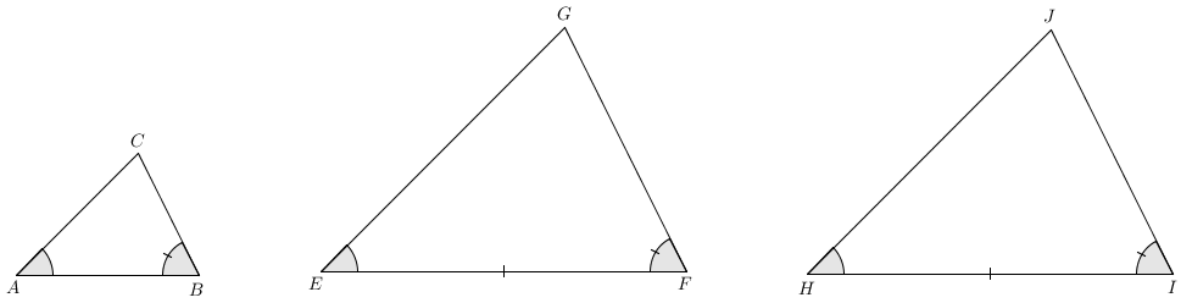


Figura 53. 2.º critério de semelhança de triângulos

Como $\overline{HI} = \overline{EF}$ e atendendo à hipótese

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}},$$

concluimos que $\overline{HJ} = \overline{EG}$. Como, por construção, $\overline{HI} = \overline{EF}$, $\hat{H} = \hat{A}$ e $\hat{I} = \hat{B}$, pelo critério de congruência de triângulos *ALA*, Proposição 9, concluimos que os

triângulos $[EFG]$ e $[HIJ]$ são congruentes. Como $[ABC]$ e $[HIJ]$ são semelhantes, concluímos facilmente que $[ABC]$ e $[EFG]$ são semelhantes. ■

O 2.º caso de semelhança de triângulos denomina-se *critério de semelhança de triângulos LAL*.

Proposição 14. (3.º critério de semelhança de triângulos)

Dados dois triângulos $[ABC]$ e $[EFG]$, se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}},$$

então os triângulos são semelhantes.

Prova. Começemos por construir um triângulo $[HIJ]$ de modo que $\hat{H} = \hat{A}$, $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\overline{HJ} = \overline{EG}$.

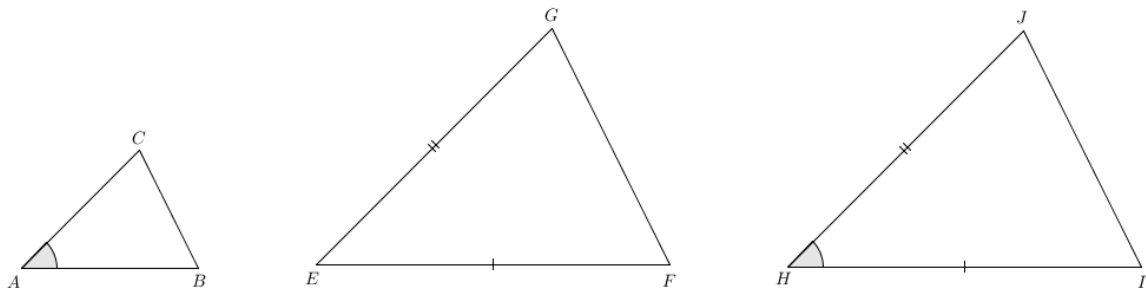


Figura 54. 3.º critério de semelhança de triângulos

Usando a hipótese, podemos estabelecer a igualdade

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}.$$

Pelo 2.º critério de semelhança de triângulos, Proposição 13, os triângulos $[ABC]$ e $[HIJ]$ são semelhantes. Assim,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{IJ}}.$$

Usando a hipótese, resulta que $\overline{IJ} = \overline{FG}$.

Por construção, tínhamos $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\overline{HJ} = \overline{EG}$. Pelo caso de congruência de triângulos *LLL*, Proposição 11, obtemos que $[HIJ]$ e $[EFG]$ são congruentes.

Como $[HIJ]$ e $[ABC]$ são semelhantes, concluímos que $[ABC]$ e $[EFG]$ são semelhantes. ■

Critério de semelhança de triângulos LLL é a designação atribuída ao 3.º caso de semelhança de triângulos.

Proposição 15.

Dado um triângulo $[ABC]$ retângulo em C , a altura $[CD]$ divide o triângulo em dois triângulos a ele semelhantes, tendo-se

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \quad e \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}.$$

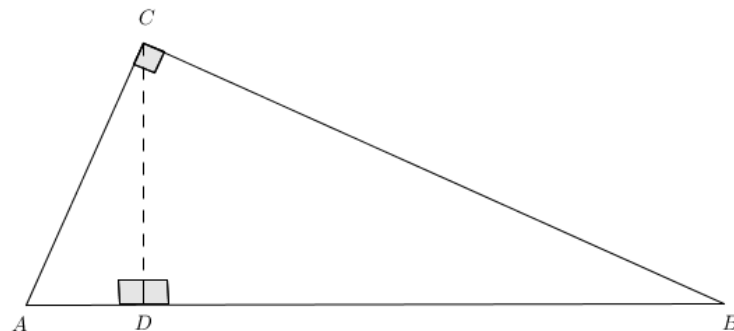


Figura 55. Triângulo retângulo e a respetiva altura

Prova. Consideremos o triângulo $[ABC]$ da figura, retângulo em C .

Tracemos a altura $[CD]$ do vértice C ao lado $[AB]$.

Como $[CD]$ é perpendicular a $[AB]$, os triângulos $[ADC]$ e $[BDC]$ são retângulos.

Pode concluir-se, pela Proposição 8, que

$$\widehat{CAB} + \widehat{CBD} = 90^\circ \quad e \quad \widehat{DCB} + \widehat{CBD} = 90^\circ.$$

Segue-se que $\widehat{CAB} = \widehat{DCB}$.

Também $\widehat{CAD} + \widehat{DCA} = 90^\circ$, logo $\widehat{CBD} = \widehat{DCA}$.

Assim, pelo critério de semelhança de triângulos AA, Proposição 12, os triângulos $[CDB]$ e $[CDA]$ são ambos semelhantes ao triângulo $[ABC]$ e são, também, semelhantes entre si.

Destas semelhanças podemos concluir várias relações entre as medidas de comprimento dos lados dos triângulos em causa. Assim, da semelhança entre os triângulos $[CDB]$ e $[CDA]$, verifica-se que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}.$$

Da semelhança entre os triângulos $[ABC]$ e $[CDB]$ verifica-se que

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}.$$

■

1.2.4. Relação entre perímetros e áreas de figuras semelhantes

Proposição 16.

Dados dois polígonos semelhantes, o perímetro do segundo é igual ao perímetro do primeiro multiplicado pela razão da semelhança que transforma o primeiro no segundo.

Prova. Consideremos dois polígonos semelhantes de n lados: $[A_1A_2 \dots A_n]$ e $[A'_1A'_2 \dots A'_n]$, $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$.

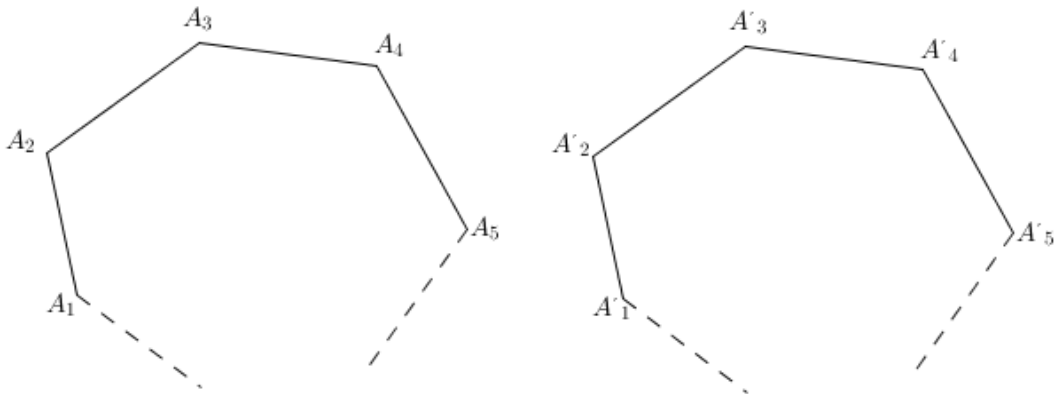


Figura 56. n -ágonos semelhantes

Seja r a razão de semelhança que transforma $[A_1A_2 \dots A_n]$ em $[A'_1A'_2 \dots A'_n]$. Assim,

$$\overline{A'_1A'_2} = r \overline{A_1A_2}, \quad \overline{A'_2A'_3} = r \overline{A_2A_3}, \quad \dots, \quad \overline{A'_{n-1}A'_n} = r \overline{A_{n-1}A_n}, \quad \overline{A'_nA'_1} = r \overline{A_nA_1}.$$

Calculemos, de seguida, o perímetro de $[A'_1A'_2 \dots A'_n]$. Ora

$$P_{[A'_1A'_2 \dots A'_n]} = \overline{A'_1A'_2} + \overline{A'_2A'_3} + \dots + \overline{A'_{n-1}A'_n} + \overline{A'_nA'_1}$$

$$= r \overline{A_1 A_2} + r \overline{A_2 A_3} + \cdots + r \overline{A_{n-1} A_n} + r \overline{A_n A_1}$$

o que é equivalente a

$$P_{[A'_1 A'_2 \dots A'_n]} = r (\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \cdots + \overline{A_{n-1} A_n} + \overline{A_n A_1}) = r P_{[A_1 A_2 \dots A_n]}. \quad \blacksquare$$

Proposição 17.

Dados dois triângulos semelhantes, a área do segundo é igual à área do primeiro multiplicada pelo quadrado da razão da semelhança que transforma o primeiro no segundo.

Prova. Sejam $[ABC]$ e $[A'B'C']$ dois triângulos semelhantes e sejam $[AD]$ e $[A'D']$ as respectivas alturas.

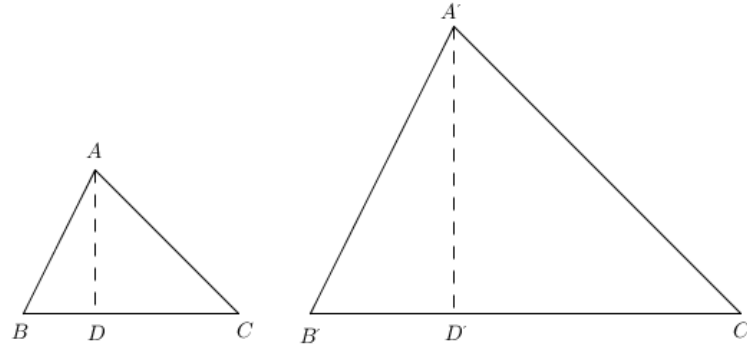


Figura 57. Triângulos semelhantes

Se r a razão de semelhança que transforma $[ABC]$ em $[A'B'C']$, então

$$\overline{A'B'} = r \overline{AB}, \quad \overline{B'C'} = r \overline{BC}, \quad \overline{C'A'} = r \overline{CA}.$$

Calculemos as áreas dos referidos triângulos:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AD}}{2}, \quad A_{[A'B'C']} = \frac{\overline{B'C'} \times \overline{A'D'}}{2}.$$

Os triângulos $[ABD]$ e $[A'B'D']$ são semelhantes, pela Proposição 12, critério de semelhança AA, logo, $\overline{A'D'} = r \overline{AD}$. Assim,

$$\begin{aligned} A_{[A'B'C']} &= \frac{r \overline{BC} \times r \overline{AD}}{2} \\ &= \frac{r^2 \overline{BC} \times \overline{AD}}{2} \\ &= r^2 A_{[ABC]}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Utilizando a Proposição 17, podemos provar um resultado análogo, envolvendo dois quaisquer polígonos semelhantes.

Proposição 18.

Dados dois polígonos semelhantes, a área do segundo é igual à área do primeiro multiplicada pelo quadrado da razão da semelhança que transforma o primeiro no segundo.

Prova. Consideremos dois polígonos semelhantes de n lados: $[A_1A_2 \dots A_n]$ e $[A'_1A'_2 \dots A'_n]$, $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$.

Seja r a razão de semelhança que transforma $[A_1A_2 \dots A_n]$ em $[A'_1A'_2 \dots A'_n]$. Assim,

$$\overline{A'_1A'_2} = r \overline{A_1A_2}, \quad \overline{A'_2A'_3} = r \overline{A_2A_3}, \quad \dots, \quad \overline{A'_{n-1}A'_n} = r \overline{A_{n-1}A_n}, \quad \overline{A'_nA'_1} = r \overline{A_nA_1}.$$

Dos vértices homólogos A_3 e A'_3 , por exemplo, tracemos as diagonais para todos os outros vértices, como mostra a figura seguinte.

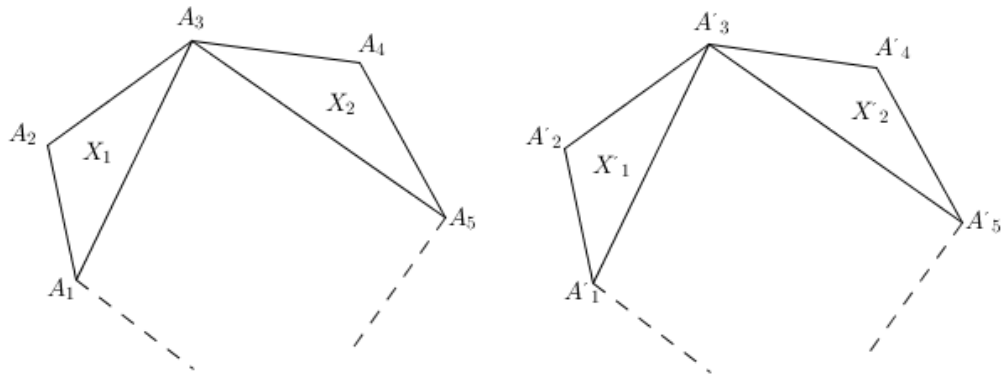


Figura 58. Polígonos semelhantes decompostos em triângulos correspondentes semelhantes

Os polígonos ficam, assim, decompostos em $n - 2$ triângulos correspondentes semelhantes. Por observação da figura,

$$A_{[A'_1A'_2 \dots A'_n]} = A_{X'_1} + A_{X'_2} + \dots + A_{X'_{n-2}},$$

$$A_{[A_1A_2 \dots A_n]} = A_{X_1} + A_{X_2} + \dots + A_{X_{n-2}}.$$

Mas, pela Proposição 17,

$$A_{X'_i} = r^2 A_{X_i}, \quad i = 1, \dots, n - 2,$$

logo

$$\begin{aligned}
A_{[A'_1 A'_2 \dots A'_n]} &= r^2 A_{X_1} + r^2 A_{X_2} + \dots + r^2 A_{X_{n-2}} \\
&= r^2 (A_{X_1} + A_{X_2} + \dots + A_{X_{n-2}}) \\
&= r^2 A_{[A_1 A_2 \dots A_n]}.
\end{aligned}$$

■

1.3. Continuação do estudo dos polígonos e da circunferência.

“O estudo das figuras no plano e no espaço começa no 1.º ciclo, considerando-as inicialmente de modo global, identificando propriedades das mesmas; no 2.º ciclo, os alunos são chamados a relacionar as suas propriedades e no 3.º ciclo surgem situações de raciocínio hipotético-dedutivo, proporcionando-lhes um primeiro contacto com este modo de pensamento”.

*In Brochura de Apoio Programa de Matemática
Ensino Básico (1997)
Ensino da Geometria e Medida*

1.3.1. Propriedades dos polígonos envolvendo ângulos internos e externos

Proposição 19.

Em qualquer triângulo, a medida do ângulo externo é igual à soma da medida dos ângulos internos não adjacentes.

Prova. Consideremos o triângulo $[ABC]$ da figura e o ângulo externo e .

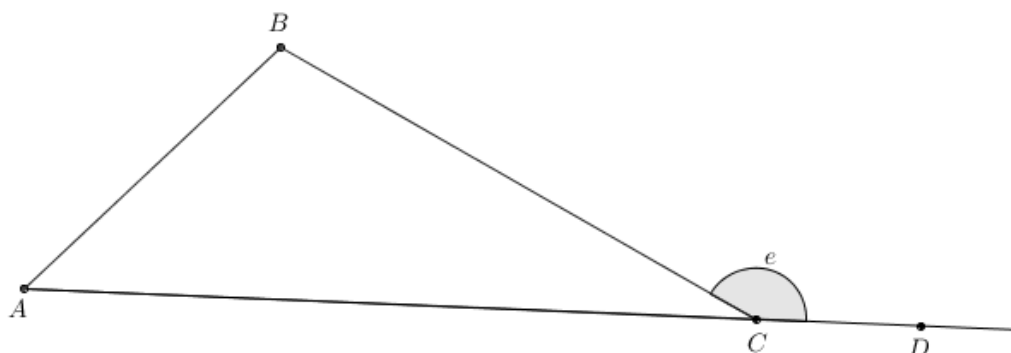


Figura 59. Ângulo externo e

Pela Proposição 8,

$$\hat{BAC} + \hat{ACB} + \hat{CBA} = 180^\circ.$$

Mas o ângulo externo e e o ângulo interno ACB são suplementares, logo

$$\hat{BAC} + \hat{ACB} + \hat{CBA} = \hat{ACB} + \hat{BCD},$$

donde, $\hat{BAC} + \hat{CBA} = \hat{BCD}$. ■

Proposição 20

A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a um ângulo giro.

Prova. Consideremos o quadrilátero $[ABCD]$ da figura decomposto nos triângulos $[ABD]$ e $[BDC]$.

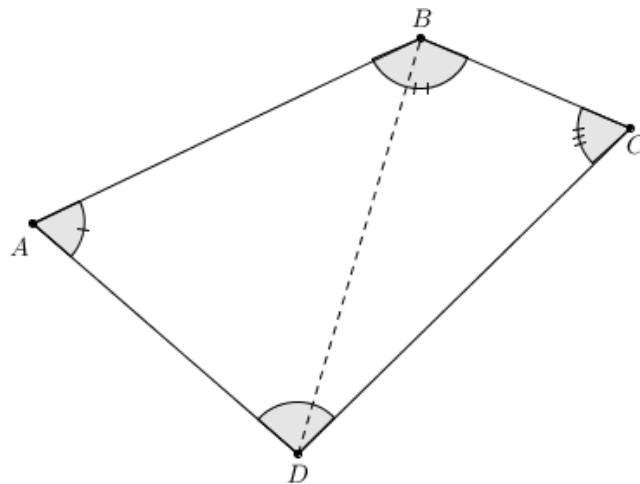


Figura 60. Soma dos ângulos internos de um quadrilátero

Pela Proposição 8, aplicada ao triângulo $[ABD]$, temos

$$(i) \quad \hat{DBA} + \hat{DAB} + \hat{BDA} = 180^\circ$$

e aplicada ao triângulo $[BDC]$, temos

$$(ii) \quad \hat{DBC} + \hat{BCD} + \hat{CDB} = 180^\circ.$$

Adicionando (i) com (ii), obtemos

$$\hat{DBA} + \hat{DAB} + \hat{BDA} + \hat{DBC} + \hat{BCD} + \hat{CDB} = 180^\circ + 180^\circ.$$

Donde,

$$\hat{ABC} + \hat{BCD} + \hat{CDA} + \hat{DAB} = 360^\circ. \quad \blacksquare$$

Proposição 21.

A soma das medidas das amplitudes, em graus, dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a $(n - 2) \times 180^\circ$.

Prova: Seja S_i a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de um polígono de n lados.

Para $n = 3$, verifica-se pela Proposição 8 que $S_i = 180^\circ = (3 - 2) \times 180^\circ$.

Para $n = 4$, verifica-se pela Proposição 20 que $S_i = 360^\circ = (4 - 2) \times 180^\circ$.

Seja $n > 4$, $n \in \mathbb{N}$. Consideremos agora um polígono convexo de n lados e tracemos todas as suas diagonais possíveis a partir de um único vértice. O polígono fica dividido em $n - 2$ triângulos.

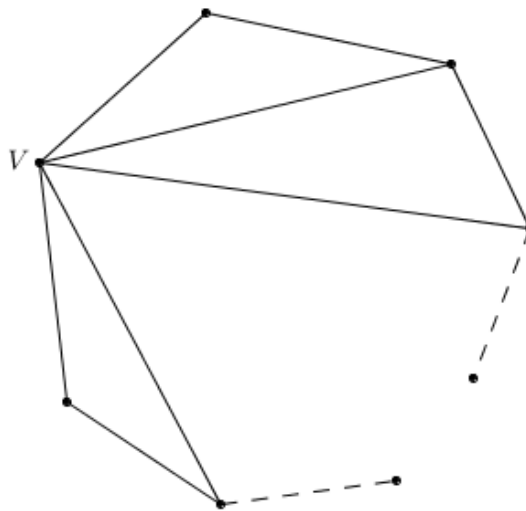


Figura 61. Polígono convexo de n lados decomposto em $n - 2$ triângulos

Assim, a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos desses $n - 2$ triângulos é $(n - 2) \times 180^\circ$. Como essa soma é igual à soma S_i das medidas das amplitudes dos ângulos internos do polígono inicial, tem-se

$$S_i = (n - 2) \times 180^\circ. \quad \blacksquare$$

Proposição 22.

A soma das medidas das amplitudes dos ângulos externos, com vértices distintos, de um polígono convexo, qualquer que seja o número de lados, é igual a um ângulo giro.

Prova. Seja S_e a soma das medidas das amplitudes dos ângulos externos, com vértices distintos, de um polígono convexo.

Num polígono convexo, em cada vértice, o ângulo externo (e) é suplementar do ângulo interno (i) que lhe é adjacente ($e + i = 180^\circ$).

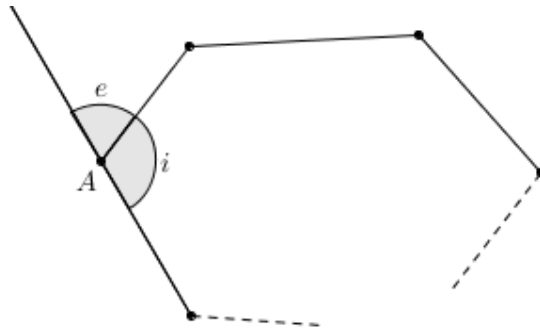


Figura 62. Polígono convexo com n lados e respectivos ângulos interno e externo num dado vértice

Calculemos a soma das medidas das amplitudes de todos os ângulos internos i_1, i_2, \dots, i_n e externos e_1, e_2, \dots, e_n , de vértices distintos, de um polígono convexo de n lados e vértices A_1, A_2, \dots, A_n :

$$\underbrace{(i_1 + e_1)}_{\text{em } A_1} + \underbrace{(i_2 + e_2)}_{\text{em } A_2} + \dots + \underbrace{(i_n + e_n)}_{\text{em } A_n} = n \times 180^\circ.$$

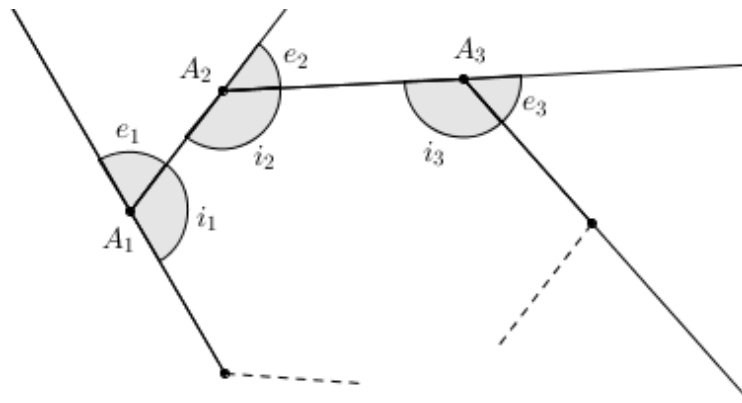


Figura 63. Esquema auxiliar à prova da Proposição 22

Seja S_i a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos do referido polígono. Então

$$\underbrace{(i_1 + i_2 + \cdots + i_n)}_{S_i} + \underbrace{(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)}_{S_e} = n \times 180^\circ.$$

Como, pela Proposição 21, $S_i = (n - 2) \times 180^\circ$, vem

$$(n - 2) \times 180^\circ + S_e = n \times 180^\circ.$$

Logo a soma das medidas das amplitudes dos ângulos externos é $S_e = 360^\circ$. ■

1.3.2. Propriedades envolvendo quadriláteros

Definição. Num quadrilátero, os vértices, ângulos ou lados não consecutivos são chamados, respetivamente, *vértices*, *ângulos* ou *lados opostos* e dois lados consecutivos são chamados *adjacentes*.

Assim, as *diagonais* de um quadrilátero são segmentos cujas extremidades são os vértices opostos.

De seguida, destacamos alguns quadriláteros importantes.

Definição. Um *quadrado* é um quadrilátero que tem os quatro lados congruentes e os quatro ângulos internos retos.

Um *retângulo* é um quadrilátero que tem todos os seus ângulos retos.

Um *paralelogramo* é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

Um *losango* é um paralelogramo que tem todos os lados congruentes.

Um *papagaio* é um quadrilátero que tem dois pares de lados adjacentes congruentes.

Um *trapézio* é um quadrilátero em que dois lados opostos são paralelos.

Os lados paralelos de um trapézio são chamados de *bases* e os outros dois são chamados de *laterais*; um trapézio é chamado *isósceles* se suas laterais forem congruentes, *retângulo* se tiver um ângulo reto e *escaleno* se não tiver lados congruentes.

Na figura seguinte, apresentamos um quadro síntese relativo à classificação dos quadriláteros.

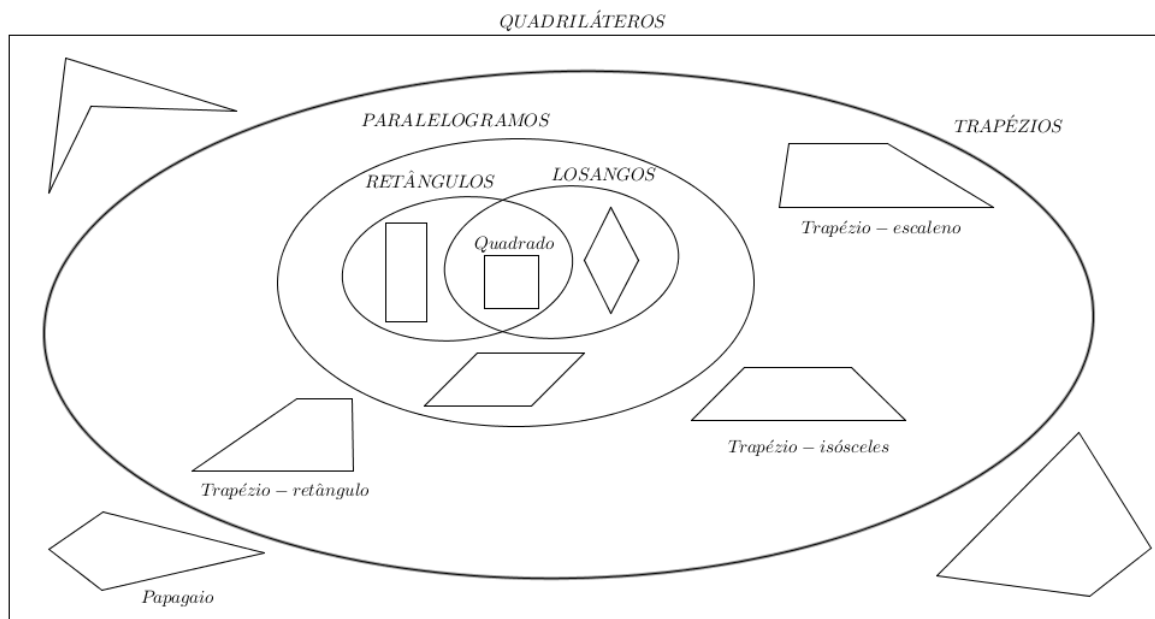


Figura 64. Quadriláteros

Proposição 23.

Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.

Prova. Consideremos o quadrilátero $[ABCD]$ da figura, em que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{AD}$ e tracemos a diagonal $[BD]$.

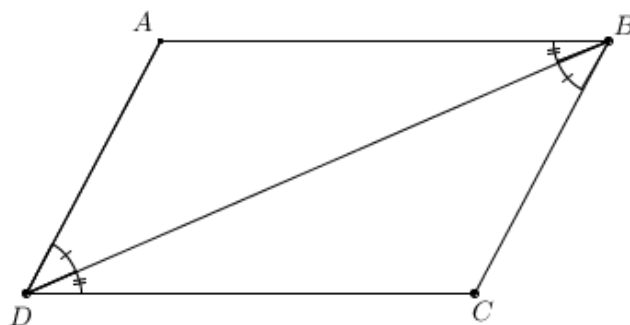


Figura 65. No quadrilátero $[ABCD]$, $[AB]$ é o lado oposto a $[DC]$ e $[AD]$ é o lado oposto a $[BC]$

Os triângulos $[ABD]$ e $[CDB]$ são congruentes, pelo critério de congruência de triângulos LLL , Proposição 11. Logo $\widehat{CBD} = \widehat{BDA}$ e $\widehat{CDB} = \widehat{DBA}$. Atendendo ao Corolário 4, a primeira igualdade garante que $[BC]$ e $[AD]$ são paralelos e a segunda

garante que $[CD]$ e $[BA]$ também são paralelos. Assim, $[ABCD]$ é um paralelogramo. ■

Proposição 24.

Num paralelogramo, lados e ângulos opostos são congruentes.

Prova. Consideremos o paralelogramo $[ABCD]$ da figura e tracemos a diagonal $[AC]$.

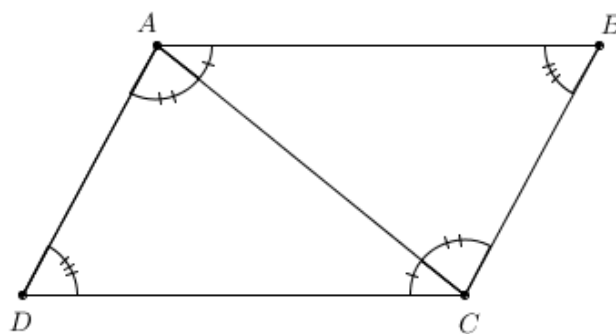


Figura 66. Lados e ângulos opostos de um paralelogramo

Como $[AB]$ e $[DC]$ são paralelos, pela Proposição 6, tem-se que $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$. Do mesmo modo, como $[AD]$ e $[BC]$ são paralelos, tem-se que $\widehat{CAD} = \widehat{ACB}$. Além disso, $[AC]$ é comum aos triângulos $[ABC]$ e $[CDA]$, assim, os referidos triângulos são congruentes, pelo critério de congruência *ALA*, Proposição 9. Logo,

$$\widehat{BAD} = \widehat{BCD}, \quad \widehat{ABC} = \widehat{ADC}, \quad \overline{AB} = \overline{CD} \quad \text{e} \quad \overline{BC} = \overline{DA},$$

isto é, são congruentes os lados opostos e ângulos opostos do paralelogramo. ■

Proposição 25.

Um quadrilátero é um paralelogramo quando (e apenas quando) as diagonais se bissetam.

Prova. Consideremos o paralelogramo $[ABCD]$ da figura e as respectivas diagonais, $[AC]$ e $[DB]$, cuja interseção é o ponto E .

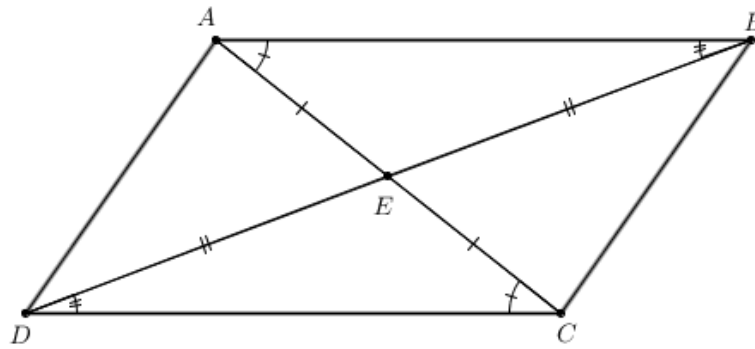


Figura 67. Paralelogramo e as respectivas diagonais

Pela Proposição 6, os ângulos ABE e CDE são congruentes, porque são ângulos alternos internos, assim como os ângulos DCE e BAE . Sendo $[ABCD]$ um paralelogramo, os lados $[AB]$ e $[DC]$ são congruentes. Pelo critério de congruência ALA , Proposição 9, concluímos que os triângulos $[ABE]$ e $[CDE]$ também o são, pelo que os lados correspondentes são congruentes e, assim, $\overline{AE} = \overline{CE}$. Usando o mesmo raciocínio, prova-se que $\overline{BE} = \overline{DE}$. Ficou, assim, provado que a diagonal $[AC]$ divide a diagonal $[DB]$ em dois segmentos com o mesmo comprimento, isto é, as diagonais bisetam-se mutuamente.

Consideremos agora o quadrilátero $[ABCD]$ da figura cujas diagonais $[AD]$ e $[BC]$ se bisetam no ponto E .

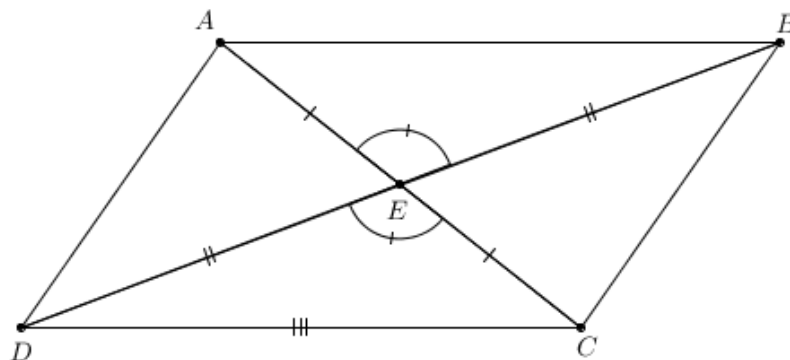


Figura 68. Esquema auxiliar à prova da Proposição 25

Temos, portanto, $\overline{AE} = \overline{EC}$ e $\overline{DE} = \overline{EB}$. Os ângulos CED e BEA são congruentes, porque são ângulos verticalmente opostos. Pelo critério de congruência LAL , Axioma 12, os triângulos $[AEB]$ e $[DEC]$ são congruentes.

Por conseguinte, $\overline{AB} = \overline{CD}$.

De modo análogo, provaríamos que $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Se os lados opostos do quadrilátero são congruentes, então, pela Proposição 23, quadrilátero é um paralelogramo. ■

Proposição 26.

Um paralelogramo tem as diagonais congruentes se e somente se é um retângulo.

Prova. Consideremos um paralelogramo $[ABCD]$ e suponhamos que as suas diagonais são congruentes e que se intersectam no ponto E .

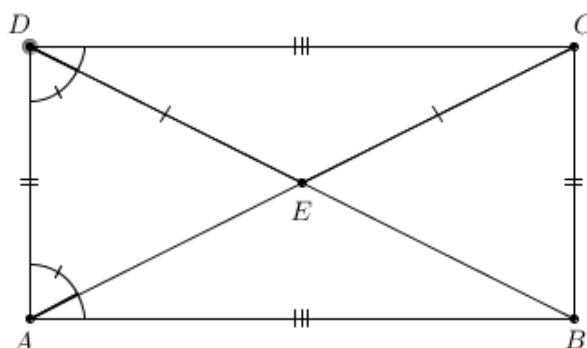


Figura 69. Diagonais iguais de um paralelogramo

Utilizando a igualdade entre os lados opostos de um paralelogramo, pelo critério de congruência *LLL*, Proposição 11, verifica-se que os triângulos $[ABD]$ e $[ACD]$ são congruentes, sendo portanto congruentes os ângulos ADC e DAB , por se oporem a lados congruentes em triângulos congruentes.

Mas como AB e DC são retas paralelas intersectadas pela transversal AD , decorre da Proposição 6 que estas determinam ângulos internos do mesmo lado suplementares. Portanto, os ângulos internos ADC e DAB têm de ser retos. O mesmo acontece com os restantes dois ângulos internos do paralelogramo, pois a soma dos seus ângulos internos é um ângulo giro, atendendo à Proposição 8.

Assim, os quatro ângulos internos são retos e o paralelogramo é um retângulo.

Consideremos, agora, o retângulo $[ABCD]$.

Pelo critério *LAL*, Axioma 12 os triângulos $[ABD]$ e $[ACD]$ são congruentes, pois são retos, respetivamente, em A e D , têm em comum o lado $[AD]$ e são congruentes os lados $[AB]$ e $[DC]$. Então serão congruentes os lados $[DB]$ e $[AC]$ (que são

exatamente as diagonais do retângulo) por se oporem a ângulos congruentes em triângulos congruentes. ■

Definição. *Bissetriz de um ângulo* é uma semirreta de origem no vértice que divide o ângulo em dois ângulos congruentes.

Proposição 27.

As diagonais de um papagaio (e, em particular, de um losango) são perpendiculares.

Prova. Consideremos o papagaio $[ABCD]$ cujas diagonais $[AC]$ e $[BD]$ se intersectam no ponto E , de modo que sejam congruentes os lados adjacentes $[AD]$ e $[DC]$.

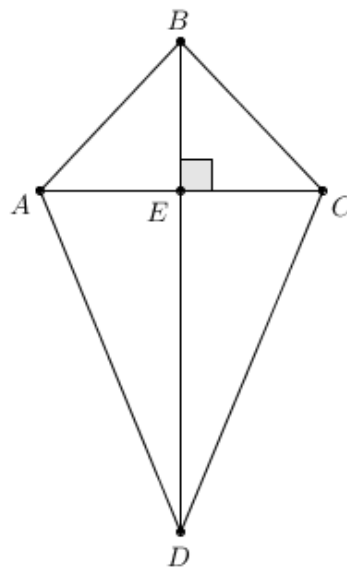


Figura 70. Diagonais de um papagaio

Vamos mostrar que as diagonais são perpendiculares.

Pelo critério de congruência *LLL*, Proposição 11, os triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$ são congruentes. Logo, os ângulos ADE e CDE são congruentes e, assim, \overleftrightarrow{DB} é a bissetriz do ângulo ADC .

Concentremo-nos, agora, nos triângulos $[AED]$ e $[DEC]$ que possuem em comum o lado $[DE]$, assim como, os lados congruentes $[AD]$ e $[DC]$. Como \overleftrightarrow{DB} é a bissetriz

do ângulo ADC , os ângulos ADE e CDE são congruentes. Pelo critério de congruência LAL , Axioma 12, os dois triângulos são congruentes e, portanto, os ângulos AED e CED são congruentes. Como

$$\widehat{AED} + \widehat{CED} = 180^\circ.$$

segue-se que

$$\widehat{AED} = \widehat{CED} = 90^\circ$$

e as diagonais $[AC]$ e $[BD]$ são perpendiculares.

Resta observar que o losango é um caso particular de um papagaio. ■

Proposição 28.

Um paralelogramo é um losango quando (e apenas quando) as diagonais são perpendiculares.

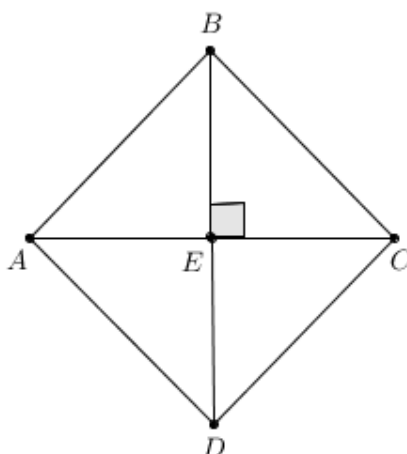


Figura 71. Diagonais de um losango

Prova. Se o paralelogramo é um losango, então as suas diagonais são perpendiculares, pela Proposição 27.

Falta verificar que se as diagonais são perpendiculares, então o paralelogramo é um losango. Para isso, consideremos o paralelogramo $[ABCD]$ de diagonais $[AC]$ e $[BD]$, perpendiculares, que se intersectam no ponto E . Temos, portanto, que

$$\widehat{BEA} = \widehat{BEC} = \widehat{CED} = \widehat{AED} = 90^\circ.$$

Como se trata de um paralelogramo, as suas diagonais bissetam-se (pela Proposição 25), donde, $\overline{AE} = \overline{EC}$ e $\overline{BE} = \overline{ED}$. Além disso, $[BE]$ é um lado comum aos triângulos $[AEB]$ e $[BEC]$, assim como $[ED]$ é um lado comum aos triângulos

$[AED]$ e $[DEC]$. Estão, pois, verificadas as condições que nos permitem concluir, usando o critério de congruência LAL , Axioma 12, que os dois pares de triângulos são congruentes entre si, pelo que $\overline{AD} = \overline{CD}$ e $\overline{CB} = \overline{BA}$, ou seja, o paralelogramo é um papagaio. Analogamente, mostrar-se-ia que $[BEC] \cong [DEC]$, logo $\overline{CB} = \overline{CD}$. Conclui-se que o papagaio é afinal um losango. ■

Proposição 29.

Um trapézio com bases congruentes é um paralelogramo.

Prova. Consideremos um trapézio $[ABCD]$ cujas bases $[AD]$ e $[BC]$ são congruentes. Pretendemos mostrar que as laterais $[AB]$ e $[CD]$ também são congruentes.

Traçando a diagonal $[AC]$ do trapézio, obtemos os triângulos $[ABC]$ e $[ACD]$.

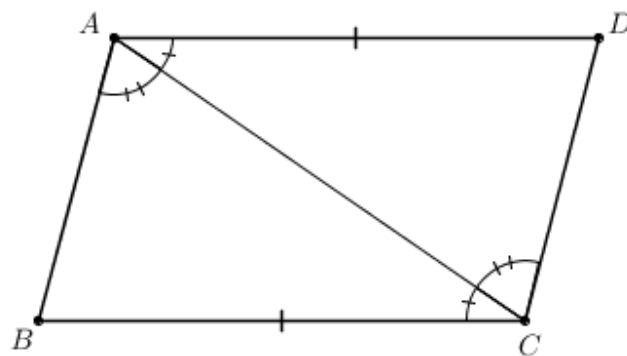


Figura 72. Trapézio com bases iguais

As retas AD e BC são paralelas, pois contêm as bases do trapézio, logo, pela Proposição 6, ao serem intersectadas pela transversal AC , determinam ângulos alternos internos congruentes, nomeadamente, $\hat{ACB} = \hat{CAD}$. Pelo critério de congruência LAL , Axioma 12, como $[AD] \cong [BC]$ e $[AC]$ é o lado comum dos triângulos, então $[ABC] \cong [ACD]$. Portanto, $[AB] \cong [CD]$ e, assim, $[ABCD]$ tem os lados opostos congruentes. Pela Proposição 23, o trapézio $[ABCD]$ é um paralelogramo. ■

1.3.3. Áreas de triângulos e quadriláteros

Definição. Uma *região quadrangular* é o conjunto dos pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um quadrado, sendo esse quadrado a *fronteira da região quadrangular*. Consideraremos como *unidade de medida* uma região quadrangular, cujo lado da fronteira mede uma unidade de comprimento. Esta região será chamada de *região quadrangular unitária*.

Axioma 14. (Normalização)

A área de uma região quadrangular Q , cuja medida do lado do quadrado é um número real positivo a é dada por $A(Q) = a^2$.

Proposição 30.

A área de um retângulo $[ABCD]$ é o produto $\overline{AD} \times \overline{AB}$.

Prova. Consideremos o retângulo $[ABCD]$ da figura.

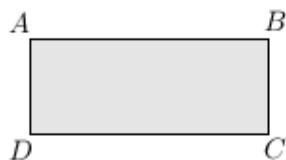


Figura 73. Retângulo $[ABCD]$

Seja $a = \overline{AD}$ e $b = \overline{AB}$. A partir do retângulo dado, construamos o quadrado, Q , de lado $a + b$.

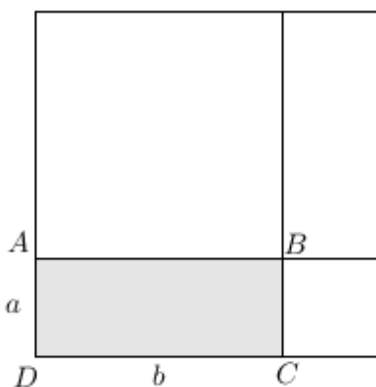


Figura 74. Quadrado de lado $a + b$

Pelo Axioma 14, tem-se

$$A(Q) = (a + b)^2.$$

Fazendo o desenvolvimento do quadrado do binómio, segue-se

$$A(Q) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Os outros dois quadrados que compõem a figura, usando o mesmo Axioma 14, têm áreas a^2 e b^2 .

Por observação da figura, podemos afirmar que

$$A(Q) = a^2 + b^2 + 2A([ABCD]),$$

isto é,

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2A([ABCD]).$$

Portanto,

$$A([ABCD]) = ab = \overline{AD} \times \overline{AB}.$$



Definição. Chama-se *projeção ortogonal* de um ponto sobre uma reta ao pé da perpendicular baixada do ponto sobre a reta.

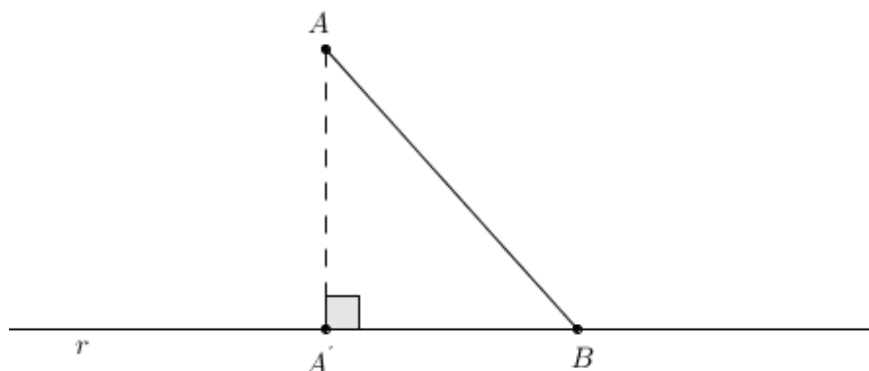


Figura 75. A' é a projeção ortogonal do ponto A sobre uma reta r

Proposição 31.

A área de um paralelogramo, de base b e altura h unidades, é igual a $b \times h$ unidades quadradas.

Prova. Consideremos o paralelogramo $[ABCD]$ da figura de base b e altura h .

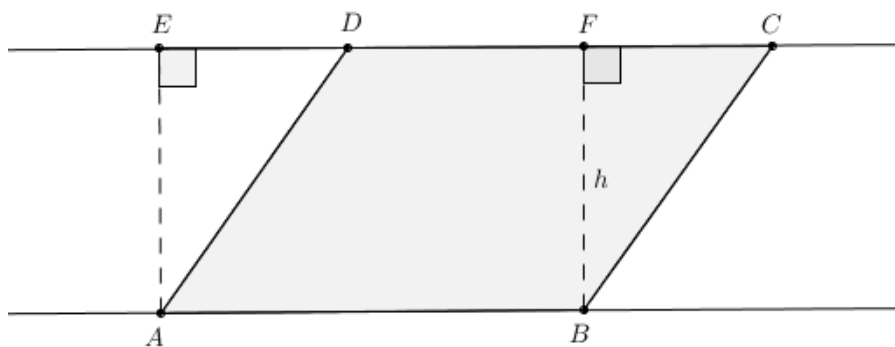


Figura 76. Área de um paralelogramo

Sejam E e F as projeções ortogonais de A e B , respetivamente, na reta CD .

Mostremos que o paralelogramo $[ABCD]$ e o retângulo $[ABFE]$ têm a mesma área.

Suponhamos, tal como a figura sugere, que F está entre C e D .

Pelo critério de congruência LAL , Axioma 12, verificamos que os triângulos retângulos $[AED]$ e $[BFC]$ são congruentes, pois $[EA] \cong [FB]$ (altura do paralelogramo), $\angle EAD \cong \angle FBC$ (pela Proposição 6) e $[AD] \cong [BC]$ (pela Proposição 24). Por conseguinte, $[AED]$ e $[BFC]$ têm a mesma área.

Por observação da figura,

$$\begin{aligned} A([ABCD]) &= A([ABFD]) + A([BFC]) \\ &= A([ABFD]) + A([AED]) \\ &= A([ABFE]) \end{aligned}$$

e, pela Proposição 30, a área do retângulo $[ABFE]$ é igual a $b \times h$. ■

Proposição 32.

A área de um triângulo, de base b e altura h unidades, é igual a

$$\frac{b \times h}{2}$$

unidades quadradas.

Prova. Consideremos o paralelogramo $[ABCD]$ e tracemos uma diagonal $[DB]$, obtendo-se, assim, o triângulo $[ABD]$.

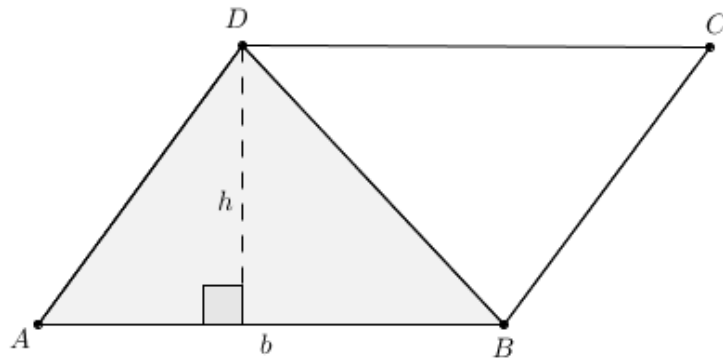


Figura 77. Área de um triângulo

Por observação da figura,

$$\begin{aligned} A([ABCD]) &= A([ABD]) + A([BCD]) \\ &= 2 \times A([ABD]). \end{aligned}$$

Pela Proposição 31, a área do paralelogramo é $b \times h$, donde

$$A([ABD]) = \frac{b \times h}{2}.$$

■

Proposição 33.

A área de um papagaio (e, em particular, de um losango), com diagonais de comprimentos D e d unidades, é igual a

$$\frac{D \times d}{2}$$

unidades quadradas.

Prova. Consideremos o papagaio $[ABCF]$ da figura, em que

$$[AB] \cong [BC] \quad \text{e} \quad [AF] \cong [CF]$$

e seja E o ponto de interseção das suas diagonais, $[BF]$ e $[AC]$.

Designaremos por D e d os comprimentos das diagonais $[BF]$ e $[AC]$, respetivamente.

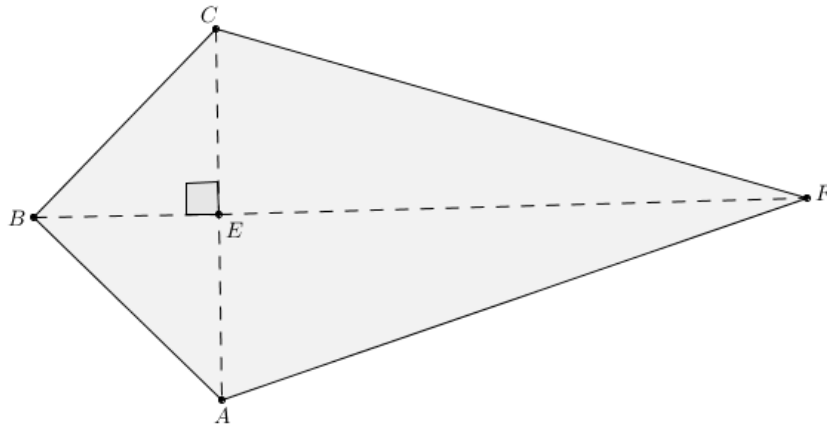


Figura 78. Área de um papagaio

Por observação da figura, como o papagaio se decompõe nos dois triângulos $[BAF]$ e $[CBF]$, é claro que

$$A([ABCF]) = A([CBF]) + A([BAF]).$$

Atendendo à fórmula para as áreas dos triângulos dada na Proposição 32, podemos concluir que

$$\begin{aligned} A([ABCF]) &= \frac{\overline{BF} \times \overline{EC}}{2} + \frac{\overline{BF} \times \overline{EA}}{2} \\ &= \frac{\overline{BF} \times (\overline{EC} + \overline{EA})}{2} \\ &= \frac{\overline{BF} \times \overline{AC}}{2} \\ &= \frac{D \times d}{2}. \end{aligned}$$

■

Proposição 34.

A área de um trapézio de bases de comprimentos B e b unidades e altura h unidades é igual a

$$\frac{(B + b) \times h}{2}$$

unidades quadradas.

Prova. Consideremos o trapézio $[ABCD]$ da figura, sendo E o pé da perpendicular traçada de C para $[AD]$, que supomos ficar situado entre os pontos A e D .

Decomponhamos, de seguida, o trapézio num triângulo e num paralelogramo, traçando um segmento $[CF]$ paralelo ao lado $[AB]$, com $F \in [AD]$, como mostra a figura.

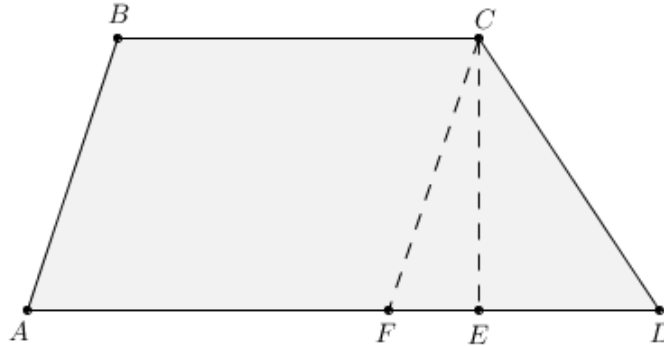


Figura 79. Área de um trapézio

Por observação da figura,

$$A([ABCD]) = A([ABCF]) + A([CFD]).$$

Verificamos que $[CE]$ é a altura para ambos os polígonos. Atendendo às fórmulas para as áreas do paralelogramo e triângulo, tem-se

$$\begin{aligned} A([ABCD]) &= \overline{AF} \times \overline{CE} + \frac{\overline{FD} \times \overline{CE}}{2} \\ &= \frac{(2 \overline{AF} + \overline{FD}) \times \overline{CE}}{2} \\ &= \frac{(\overline{BC} + \overline{AF} + \overline{FD}) \times \overline{CE}}{2} \\ &= \frac{(\overline{BC} + \overline{AD}) \times \overline{CE}}{2}, \end{aligned}$$

como pretendido, pois $[BC]$ e $[AD]$ são as bases do trapézio. ■

1.3.4. Lugares geométricos envolvendo pontos notáveis de triângulos.

Já foram, anteriormente, introduzidas as definições de bissetriz de um ângulo e de altura de um triângulo. De seguida, definiremos outros segmentos notáveis do triângulo.

Definição. *Mediana de um triângulo é o segmento que une o vértice ao ponto médio do lado oposto.*

Definição. *Mediatriz de um triângulo é a reta perpendicular ao lado do triângulo pelo seu ponto médio.*

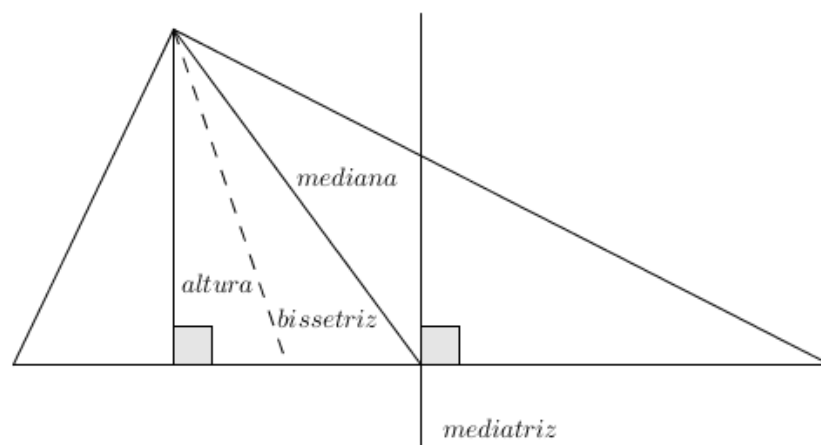


Figura 80. Segmentos notáveis de um triângulo

Proposição 35.

Num triângulo isósceles a mediana relativa à base é também a sua altura e a bissetriz do ângulo oposto à base.

Prova: Consideremos um triângulo $[ABC]$ isósceles de base $[BC]$ e mediana, relativa à base, $[AD]$.

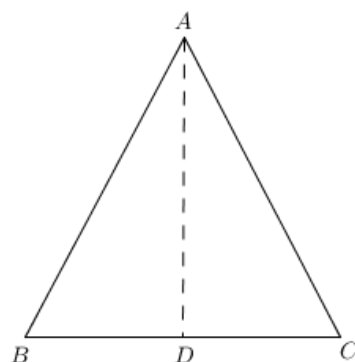


Figura 81. Triângulo isósceles

Queremos provar que $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ e que $\widehat{BDA} = 90^\circ$.

A mediana relativa à base $[BC]$ é o lado comum $[AD]$ dos triângulos $[ABD]$ e $[ADC]$. Além disso, como D é o ponto médio de $[BC]$, temos que $[BD] \cong [DC]$ e como o

triângulo é isósceles de base $[BC]$, temos que $[AB] \cong [AC]$. Então os triângulos $[ABD]$ e $[ADC]$ são congruentes, pelo critério de congruência *LLL*, Proposição 11. Assim, ângulos correspondentes do triângulo são congruentes.

A igualdade $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ estabelece que \overline{AD} é a bissetriz de ângulo \widehat{BAC} .

Como o ângulo BDC é raso, por observação da figura, tem-se

$$\widehat{BDA} + \widehat{ADC} = 180^\circ.$$

Como $\widehat{BDA} = \widehat{ADC}$, concluímos que $\widehat{BDA} = \widehat{ADC} = 90^\circ$. Portanto, $[AD]$ é perpendicular a $[BC]$, ou seja, é a altura do triângulo $[ABC]$ em relação à sua base. ■

Definição. *Circunferência* é o conjunto dos pontos do plano que estão à mesma distância de um ponto designado por *centro da circunferência*. Estes pontos formam uma linha curva fechada.

A distância entre cada ponto da linha e o centro chama-se *raio* da circunferência.

Proposição 36.

As mediatrizes dos lados de um triângulo intersectam-se num único ponto. Esse ponto é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

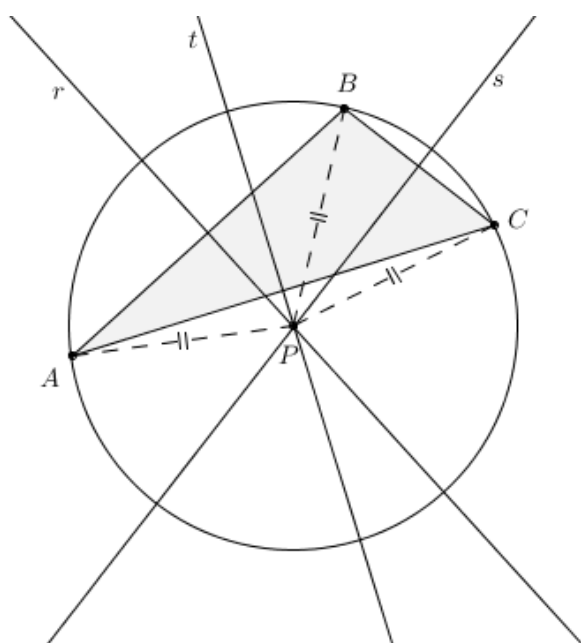


Figura 82. Circuncentro do triângulo

Prova. Sejam $[ABC]$ um triângulo, r , s e t as retas correspondentes às mediatrizes dos lados $[AB]$, $[BC]$ e $[CA]$, respetivamente.

Mostremos que existe um único ponto P tal que $r \cap s \cap t = \{P\}$.

Observemos inicialmente que duas dessas mediatrizes não podem ser paralelas. Consideremos as mediatrizes r, s e vamos supor que r é paralela a s . Como elas são perpendiculares, respetivamente, aos lados $[AB]$ e $[CA]$, teríamos necessariamente esses lados paralelos, o que é absurdo. Logo existe um ponto P comum às retas r e s , conforme se pode observar na figura acima.

Sabemos que qualquer ponto pertencente à mediatriz do segmento $[AB]$ é equidistante dos extremos, A e B , desse segmento. Assim, $\overline{PA} = \overline{PB}$, pois P pertence à mediatriz de $[AB]$. De igual modo, $\overline{PB} = \overline{PC}$, pois P pertence à mediatriz de $[BC]$. Verifica-se, então, que $\overline{PA} = \overline{PC}$. Concluimos, então, que P pertence à mediatriz de $[CA]$, donde, $r \cap s \cap t = \{P\}$.

Sendo A , B e C pontos da circunferência circunscrita ao triângulo e verificando-se $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$, podemos afirmar que P é o centro da circunferência. ■

Definição. O ponto de interseção das mediatrizes é designado por *circuncentro do triângulo*.

Proposição 37.

As retas suporte das três alturas de um triângulo são concorrentes num mesmo ponto.

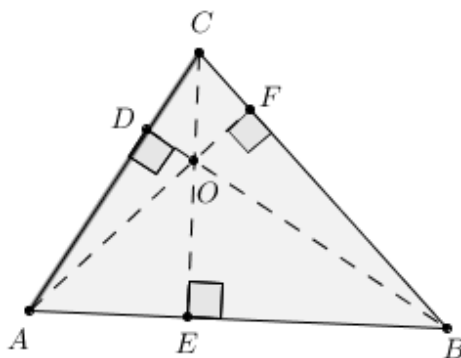


Figura 83. Ortocentro de um triângulo

Prova. Seja $[ABC]$ um triângulo e $[CE]$, $[AF]$, $[BD]$ as respetivas alturas.

Consideremos três retas, cada uma paralela a um dos lados do triângulo e passando pelo vértice oposto. Estas três retas determinam um novo triângulo $[GHI]$.

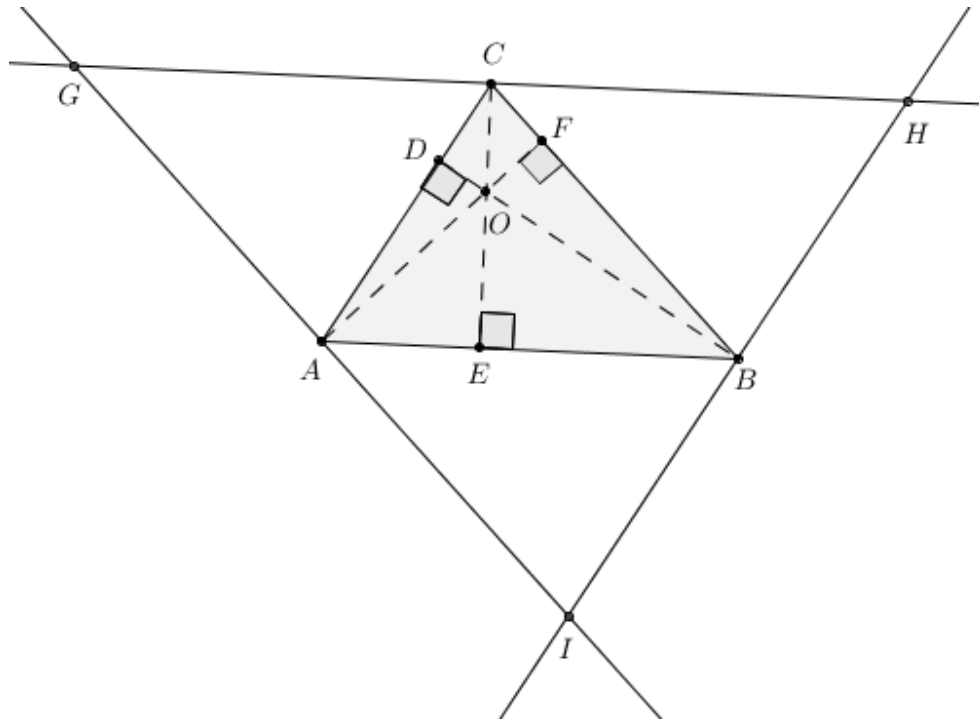


Figura 84. Esquema auxiliar para a prova da Proposição 37

Por construção da figura, obtém-se $GH \parallel AB$, pelo que $[ABCG]$ e $[ABHC]$ são paralelogramos. Deste modo, $\overline{AB} = \overline{GC}$ e $\overline{AB} = \overline{CH}$, donde, $\overline{GC} = \overline{CH}$. Assim, como CE é perpendicular a AB e, portanto, também a GH , CE é a mediatriz de $[GH]$.

Pela Proposição 36 sabemos que as mediatrizes de um triângulo se interseitam num ponto que, neste caso, coincide com o ponto de interseção das três alturas do triângulo. ■

Definição. O ponto de interseção das alturas designa-se por *ortocentro do triângulo*.

Propriedade 38.

A bissetriz de um ângulo convexo é o lugar geométrico dos pontos do ângulo que são equidistantes das retas suportes dos lados do ângulo.

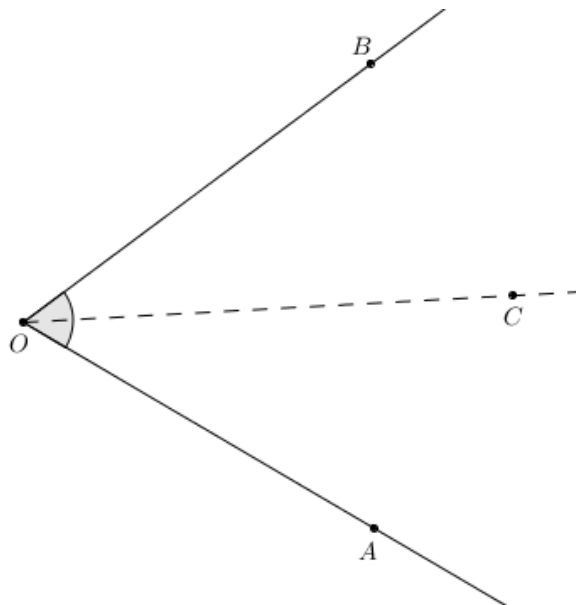


Figura 85. Bissetriz de um ângulo

Prova. Seja P um ponto qualquer da bissetriz OC de um ângulo AOB .

Sejam \overline{PM} e \overline{PN} as distâncias de P às retas suporte dos lados OA e OB , respectivamente. Iremos provar que $\overline{PM} = \overline{PN}$.

Para isso, consideremos os triângulos $[MOP]$ e $[NOP]$.

Verificamos que os triângulos referidos são congruentes pelo critério de congruência *ALA*, Proposição 9, pois têm um lado em comum, $[OP]$, e dois ângulos correspondentes congruentes, $\widehat{MOP} = \widehat{NOP}$, por definição de bissetriz, e, $\widehat{OMP} = \widehat{ONP}$, por serem ambos ângulos retos. Assim, concluímos que $\overline{PM} = \overline{PN}$ e, por conseguinte, P é equidistante dos lados do ângulo AOB .

Resta-nos agora provar que só os pontos da bissetriz são equidistantes dos lados desse ângulo.

Seja Q um ponto qualquer do plano, tal que $\overline{QM} = \overline{QN}$ (distâncias de Q , respectivamente aos lados OA e OB do ângulo AOB).

Iremos provar que o ponto Q pertence à bissetriz do ângulo AOB .

Consideremos os triângulos retângulos $[MOQ]$ e $[NOQ]$. Por hipótese, $\overline{QM} = \overline{QN}$ e $[OQ]$ é um lado comum aos dois triângulos. Logo os triângulos são congruentes, pelo critério de congruência *LAL* (Axioma 12). Resulta, portanto, que $\widehat{MOQ} = \widehat{NOQ}$ e, sendo os respectivos ângulos adjacentes, OQ é a bissetriz.

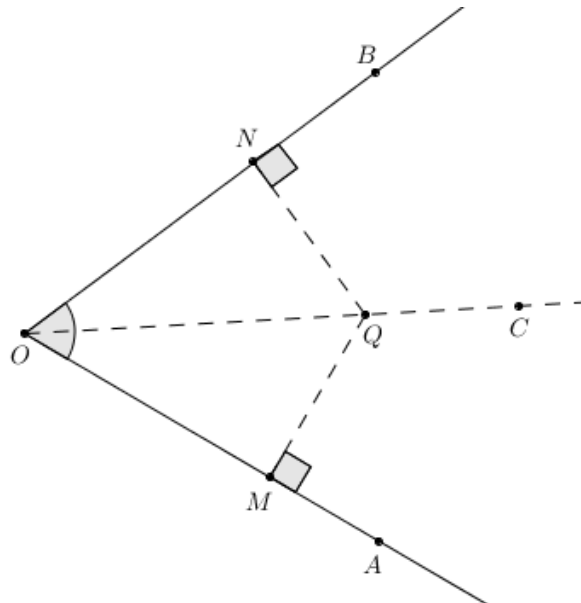


Figura 86. Esquema auxiliar à prova da Proposição 38

Logo, Q pertence à bissetriz do ângulo AOB . ■

Proposição 39.

As bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo interseçam-se num ponto. Este ponto é o centro da circunferência inscrita ao triângulo.

Prova. Consideremos o triângulo $[ABC]$. Seja I o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos CAB e ABC .

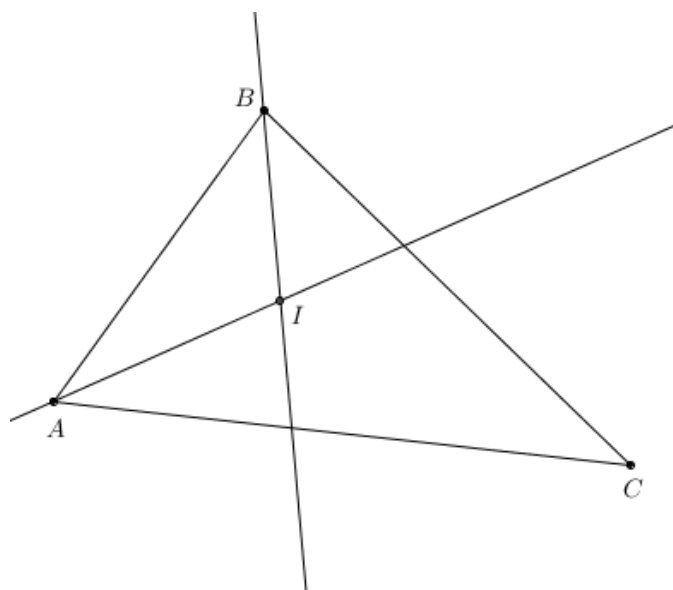


Figura 87. Triângulo e duas das suas bissetrizes

Iremos provar que \hat{CI} é a bissetriz do ângulo ACB .

Se I pertence à bissetriz do ângulo CAB , então pela Proposição 38 é equidistante das retas AB e AC . Como o ponto também pertence à bissetriz do ângulo ABC , então é equidistante das retas AB e BC . Assim, podemos concluir que I é também equidistante das retas AC e BC , logo pertence à bissetriz do ângulo ACB .

Atendendo a que o ponto I pertence às três bissetrizes dos ângulos internos do triângulo então, sendo J, K e L , respectivamente, os pés das perpendiculares traçadas para cada um dos lados do triângulo, $\overline{IJ} = \overline{IK} = \overline{IL}$, ou seja, I é o centro de uma circunferência que passa pelos pontos J, K e L . Como os segmentos $[IJ], [IK], [IL]$, raios da circunferência, são perpendiculares aos lados do triângulo, estes são tangentes à circunferência e portanto a circunferência é inscrita ao triângulo. ■

Definição. O ponto de interseção das bissetrizes é *designado por incentro do triângulo*.

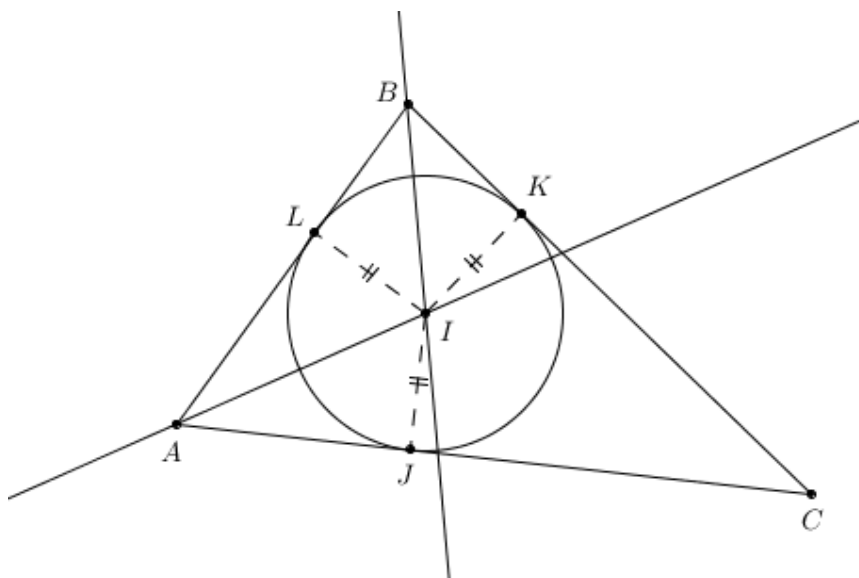


Figura 88. Incentro do triângulo

Proposição 40.

Duas quaisquer medianas de um triângulo interseçam-se num ponto a uma distância de cada um dos vértices igual a $2/3$ do comprimento da respectiva mediana.

Prova. Consideremos o triângulo $[ABC]$ e tracemos as medianas que unem os vértices B e C aos pontos médios dos lados opostos, respectivamente M_b e M_c . Seja G o ponto de interseção destas duas medianas, conforme se pode observar na figura.

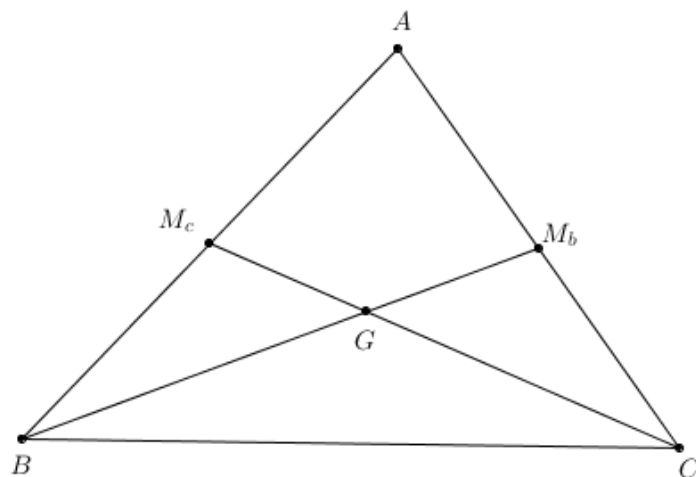


Figura 89. Triângulo e duas das suas medianas

Tracemos a semirreta \overrightarrow{AG} que intersesta $[BC]$ num ponto, que iremos designar por M_a . Se provarmos que M_a é o ponto médio de $[BC]$, fica provado que $[AM_a]$ é a terceira mediana do triângulo $[ABC]$.

Seja E um ponto da reta AG , tal que $\overline{GE} = \overline{AG}$. Tracemos os segmentos $[BE]$ e $[CE]$.

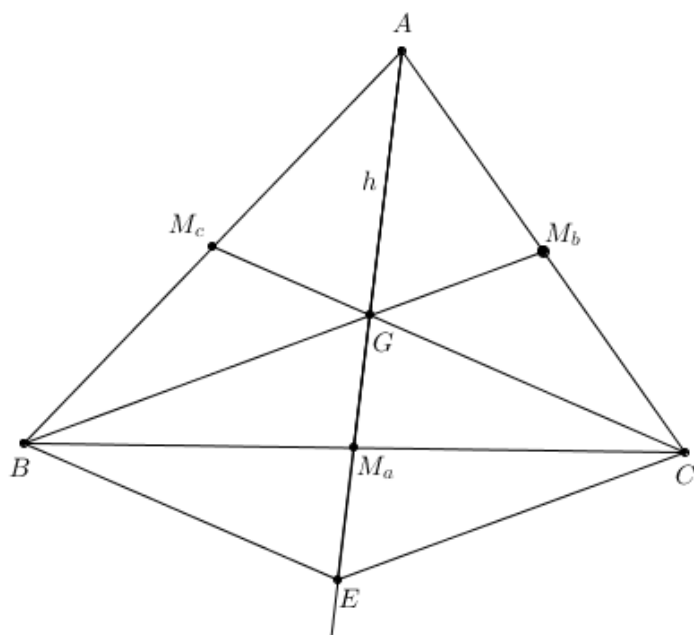


Figura 90. Esquema auxiliar à prova da Proposição 40

No triângulo $[ABE]$, $[GM_c]$ é paralelo a $[BE]$, pois G e M_c são pontos médios dos lados $[AE]$ e $[AB]$, respetivamente.

De modo análogo, $[GM_b]$ é paralelo a $[CE]$ no triângulo $[ACE]$.

Assim, $[BECG]$ é um paralelogramo e, pela Proposição 24, as suas diagonais $[BC]$ e $[GE]$ bissectam-se.

Logo, M_a é o ponto médio de $[BC]$ e $[AM_a]$ é a terceira mediana.

Como M_a é também o ponto médio de $[GE]$, verificamos que

$$\overline{AG} = \overline{GE} = 2 \overline{GM_a}$$

ou, equivalentemente,

$$\overline{AG} = \overline{GE} = \frac{2}{3} \overline{AM_a}.$$

Analogamente, provaríamos que

$$\overline{BG} = 2 \overline{GM_b} = \frac{2}{3} \overline{BM_b}$$

e

$$\overline{CG} = 2 \overline{GM_c} = \frac{2}{3} \overline{CM_c},$$

como pretendido. ■

Definição. O ponto de interseção das medianas é designado por *baricentro do triângulo* ou *centro de gravidade do triângulo*.

Definição. O lado com maior medida de comprimento num triângulo retângulo chama-se *hipotenusa*.

Proposição 41.

Num triângulo retângulo, a medida da mediana, relativa à hipotenusa, é igual a metade da medida da hipotenusa.

Prova. Consideremos a circunferência de centro O e diâmetro $[BC]$ e nela inscrita o triângulo $[ABC]$. Pela Proposição 46⁴, este triângulo é retângulo em A .

⁴ Enunciada na seção 1.3.5.

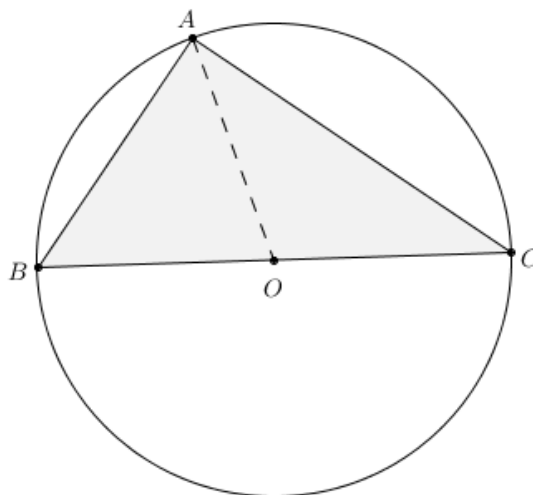


Figura 91. Triângulo retângulo inscrito numa circunferência

Tracemos a mediana $[AO]$ relativa à hipotenusa $[BC]$. Sendo O ponto médio da hipotenusa $[BC]$, esta mediana é raio da circunferência e

$$\overline{AO} = \frac{\overline{BC}}{2}.$$

■

1.3.5. Ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência

Definição. Dizemos que os segmentos determinados por dois pontos quaisquer da circunferência são *cordas da circunferência*.

Uma corda $[CD]$ que contenha o centro da circunferência denomina-se *diâmetro da circunferência*.

Dois pontos distintos dividem a circunferência em duas partes; cada uma dessas partes é chamada *arco de circunferência*.

Um ângulo cujo vértice coincide com o centro da circunferência chama-se *ângulo ao centro*; caso contrário chama-se *excêntrico*.

Um ângulo excêntrico cujo vértice está sobre a circunferência e cujos lados contém cordas dessa circunferência denomina-se *ângulo inscrito*.

Dada uma circunferência de centro O e pontos A, B, C e D sobre ela, podemos considerar, por exemplo, as cordas $[AB]$, $[CD]$ e o ângulo ao centro $\angle AOC$, como se ilustra na figura que se segue; a corda $[CD]$ contém o centro da circunferência e, por isso, é um diâmetro da circunferência.

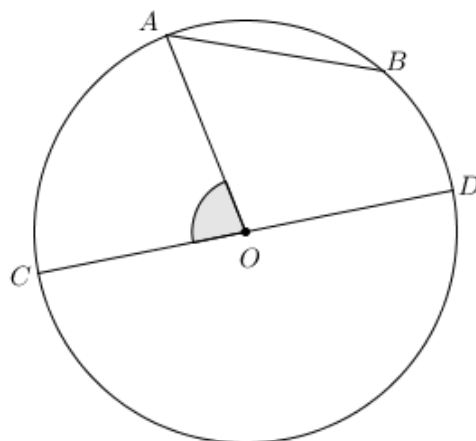


Figura 92. Elementos de uma circunferência

Definição. A *amplitude do arco* determinado pelos pontos S e P da circunferência de centro O é igual à amplitude do ângulo ao centro $\angle POS$ e representa-se por \widehat{PS} .

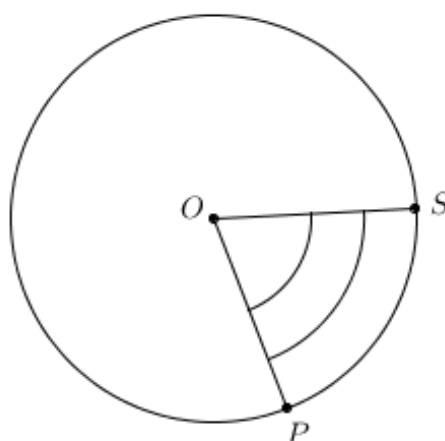


Figura 93. Amplitude de um arco de circunferência

Proposição 42.

Numa circunferência, ou em circunferências iguais, cordas determinadas por ângulos ao centro iguais também são iguais e vice-versa.

Prova. Consideremos a circunferência de centro O , cordas $[AB]$, $[CD]$ e ângulos ao centro AOB e COD .

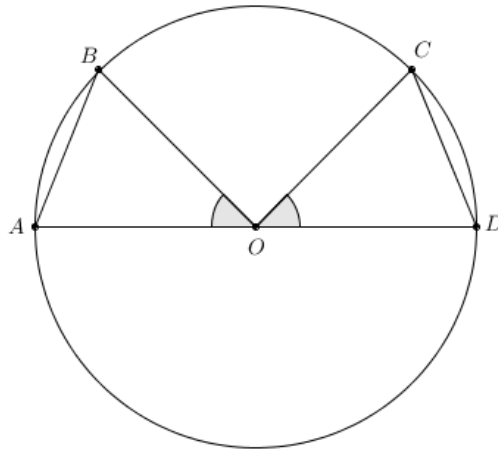


Figura 94. Cordas determinadas por ângulos ao centro iguais

Suponhamos que os ângulos ao centro AOB e COD são congruentes. Mostremos que as cordas, $[AB]$ e $[CD]$ também o são.

Consideremos, então, os triângulos $[AOB]$ e $[COD]$ da mesma figura.

Como $\overline{AO} = \overline{OD} = \overline{OB} = \overline{OC}$ (porque são raios) e $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ (por hipótese), concluímos que os triângulos referidos são congruentes (pelo critério de congruência de triângulos LAL , Axioma 12). Como consequência, $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Consideremos agora que as cordas, $[AB]$ e $[CD]$, são congruentes. Mostremos que os ângulos ao centro AOB e COD também o são.

Como $\overline{AO} = \overline{OD} = \overline{OB} = \overline{OC}$ (porque são raios) e $\overline{AB} = \overline{CD}$ (por hipótese), concluímos que os triângulos são congruentes (pelo critério de congruência de triângulos LLL , Proposição 11). Como consequência, $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$. ■

Proposição 43.

Qualquer reta que passa pelo centro de uma circunferência e é perpendicular a uma corda a bissecta, assim como aos arcos e aos ângulos ao centro correspondentes.

Prova. Consideremos uma circunferência de centro O e uma sua corda $[AB]$.

Seja r a reta que passa pelo centro da circunferência e é perpendicular a essa corda, intersectando-a no ponto P .

Tracemos os raios $[AO]$ e $[BO]$ da circunferência.

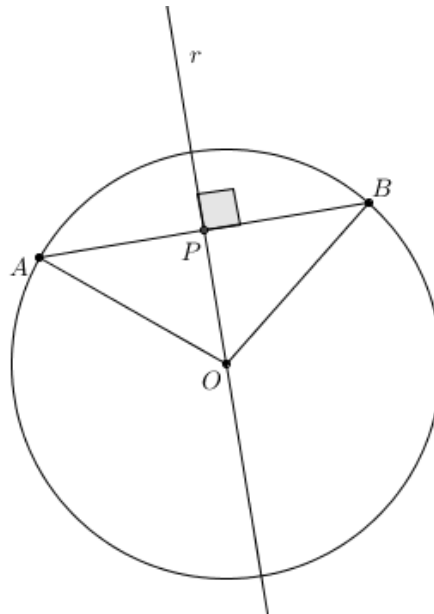


Figura 95. Circunferência e respetiva corda

Os triângulos $[OAP]$ e $[OBP]$ têm, de um para o outro, dois pares de lados congruentes, $\overline{OA} = \overline{OB}$ (ambos são raios) e $[OP]$ é um lado comum. Como, por hipótese, a reta r é perpendicular à corda $[AB]$, verifica-se que $[OAP]$ e $[OBP]$ são triângulos retângulos, com ângulo reto no vértice P . Pelo Teorema de Pitágoras⁵, segue-se que,

$$\overline{AP}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OP}^2$$

e

$$\overline{PB}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OP}^2,$$

portanto $\overline{AP} = \overline{PB}$, concluindo-se, assim, que a reta r bisseta a corda $[AB]$. ■

Proposição 44.

A amplitude de um ângulo inscrito é igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os respetivos lados.

⁵ Enunciado no capítulo 2

Prova. Consideremos uma circunferência de centro O e três pontos R , Q e S pertencentes a essa circunferência. Seja $[QS]$ um dos seus diâmetros.

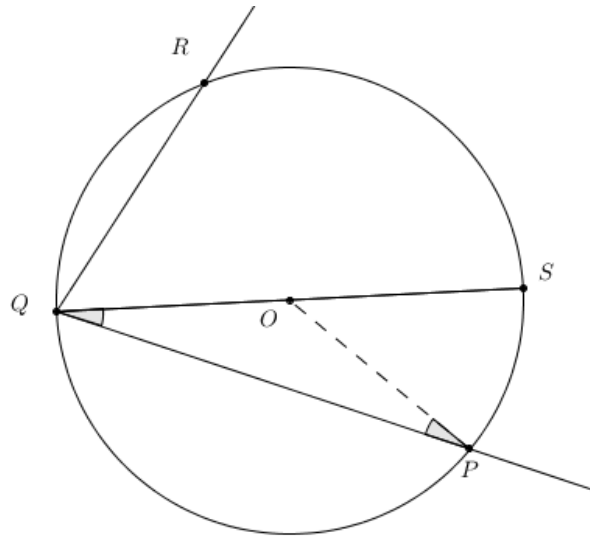


Figura 96. Amplitude de um ângulo inscrito

Consideremos dois casos possíveis:

- i. Um dos lados do ângulo inscrito contém o diâmetro da circunferência;
- ii. Nenhum dos lados do ângulo inscrito contém o diâmetro da circunferência.

Para o primeiro caso, vamos considerar o ângulo PQS e vamos mostrar que a sua amplitude é metade da amplitude \widehat{PS} do arco compreendido entre os seus lados.

Observa-se que $[PQO]$ é um triângulo isósceles, pois $OQ = OP$, logo $OQP = OPQ$, pela Proposição 10.

Como o ângulo POS é externo do triângulo $[PQO]$, então $POS = OPQ + OQP$, pelo Teorema do ângulo externo, ou seja, $POS = 2 \times PQS$. Como a amplitude do ângulo ao centro POS é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, segue-se que $\widehat{PS} = 2 \times PQS$, ou seja,

$$PQS = \frac{\widehat{PS}}{2}.$$

Para o segundo caso, vamos considerar o ângulo PQR e vamos mostrar que a sua amplitude é metade da amplitude \widehat{PR} do arco compreendido entre os seus lados.

No primeiro caso, já provámos que se um dos lados de um ângulo inscrito contiver um diâmetro, então a medida da respetiva amplitude é igual a metade da medida da amplitude do arco compreendido entre os respetivos lados. Portanto,

$$P\hat{Q}S = \frac{\widehat{PS}}{2} \quad \text{e} \quad S\hat{Q}R = \frac{\widehat{SR}}{2}.$$

Mas $P\hat{Q}R = P\hat{Q}S + S\hat{Q}R$, donde,

$$P\hat{Q}R = \frac{\widehat{PS}}{2} + \frac{\widehat{SR}}{2} = \frac{\widehat{PR}}{2}.$$

■

Proposição 45.

Ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência têm a mesma amplitude.

Prova. Este resultado é consequência imediata da Proposição 44, pois, como mostra a figura abaixo, os ângulos AV_1B , AV_2B e AV_3B estão inscritos no mesmo arco, tendo, por isso, amplitude igual a metade da amplitude do arco correspondente.

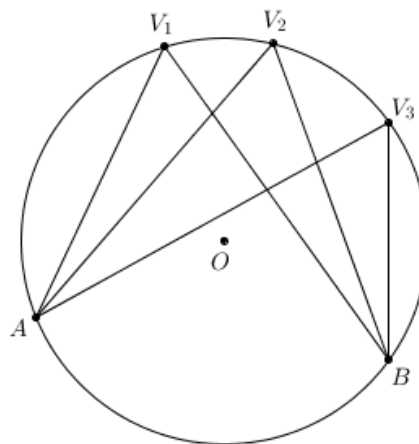


Figura 97. Arcos inscritos num mesmo arco

■

Proposição 46.

Um ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo reto.

Prova. Este resultado é um caso particular da Proposição 44 que ocorre quando o ângulo está inscrito numa semicircunferência. Neste caso, o arco correspondente ao ângulo inscrito mede 180° .

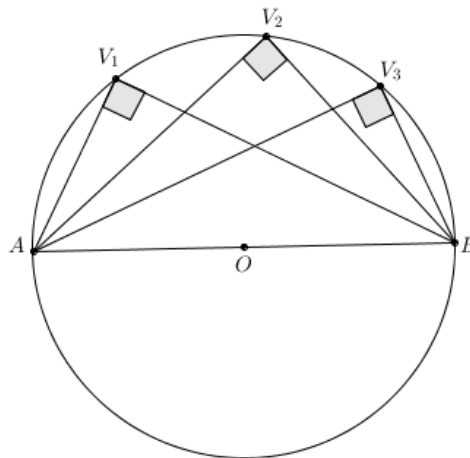


Figura 98. Ângulos inscritos numa semicircunferência

Portanto, a medida do ângulo inscrito é igual a metade de 180° , ou seja, 90° . ■

Definição Um ângulo de vértice num dos extremos de uma corda, um dos lados contendo a corda e o outro tangente à circunferência chama-se *ângulo do segmento*.

Proposição 47.

Um ângulo do segmento tem amplitude igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

Prova. Consideremos a circunferência de centro O e o ângulo de segmento SPQ .

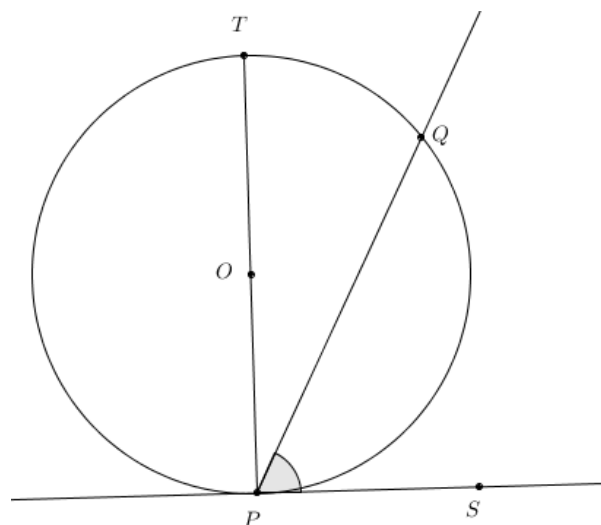


Figura 99. Âplitude de um ângulo de segmento

Vamos mostrar que

$$S\hat{P}Q = \frac{\widehat{PQ}}{2}.$$

Como TPQ é um ângulo inscrito, pela Proposição 44, tem-se

$$T\hat{P}Q = \frac{\widehat{TQ}}{2},$$

Os ângulos SPQ e TPQ são complementares, logo, $S\hat{P}Q = 90^\circ - T\hat{P}Q$. Donde,

$$\begin{aligned} S\hat{P}Q &= 90^\circ - \frac{\widehat{TQ}}{2} \\ &= \frac{180^\circ - \widehat{TQ}}{2} \\ &= \frac{\widehat{PQ}}{2}. \end{aligned}$$

■

Definição. Um ângulo adjacente a um ângulo inscrito num arco de circunferência e a ele suplementar denomina-se *ângulo ex inscrito*.

Proposição 48.

A amplitude de um ângulo ex inscrito num arco de circunferência é igual à semissoma das amplitudes dos arcos correspondentes às cordas que as retas suporte dos lados do ângulo contêm.

Prova. Consideremos o ângulo ex inscrito SQR . Vamos mostrar que $S\hat{Q}R$ coincide com a semissoma das amplitudes dos arcos correspondentes às cordas $[PQ]$ e $[QR]$.

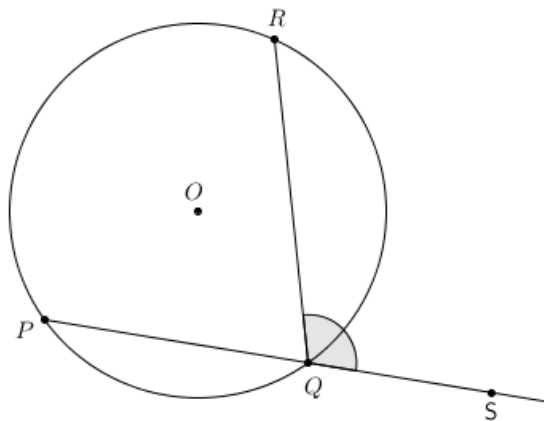


Figura 100. Ângulo ex inscrito

Observa-se que PQR é o ângulo inscrito no arco de medida \widehat{PR} , logo

$$P\hat{Q}R = \frac{\widehat{PR}}{2},$$

pela Proposição 44. Como o ângulo SQR é o suplementar do ângulo PQR , então

$$S\hat{Q}R = 180^\circ - \frac{\widehat{PR}}{2}.$$

Mas

$$\widehat{PR} = 360^\circ - (\widehat{PQ} + \widehat{QR}),$$

logo

$$S\hat{Q}R = 180^\circ - \frac{360^\circ - (\widehat{PQ} + \widehat{QR})}{2} = \frac{\widehat{PQ} + \widehat{QR}}{2},$$

como pretendido. ■

Proposição 49.

A amplitude de um ângulo de vértice no interior de uma circunferência é igual à semissoma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os lados do ângulo e os lados do ângulo verticalmente oposto.

Prova. Consideremos a circunferência de centro O da figura e o ângulo QPR de vértice no interior do círculo.

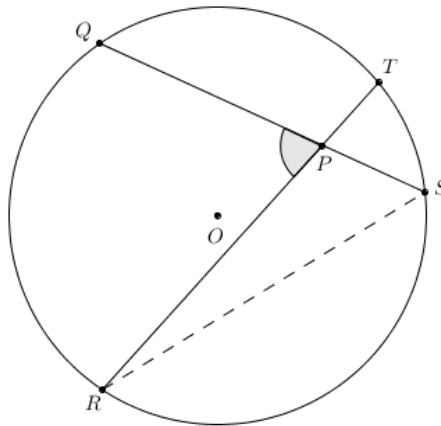


Figura 101. Ângulo convexo de vértice no interior da circunferência

Vamos mostrar que

$$Q\hat{P}R = \frac{\widehat{ST} + \widehat{QR}}{2}.$$

Os ângulos QSR e SRT são ambos inscritos à circunferência, logo

$$Q\hat{S}R = \frac{\widehat{QR}}{2} \quad \text{e} \quad S\hat{R}T = \frac{\widehat{ST}}{2}.$$

pela Proposição 44. Como $Q\hat{P}R$ é um ângulo externo ao triângulo $[PSR]$, então, pelo Teorema do ângulo externo tem-se $Q\hat{P}R = S\hat{R}P + P\hat{S}R$. Mas, $S\hat{R}P = S\hat{R}T$ e $P\hat{S}R = Q\hat{S}R$. Donde,

$$\begin{aligned} Q\hat{P}R &= S\hat{R}T + Q\hat{S}R \\ &= \frac{\widehat{ST} + \widehat{QR}}{2}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Proposição 50.

A amplitude de um ângulo de vértice exterior a uma circunferência e cujos lados a intersectam é igual à semidiferença entre a maior e a menor das amplitudes dos arcos compreendidos entre os respectivos lados.

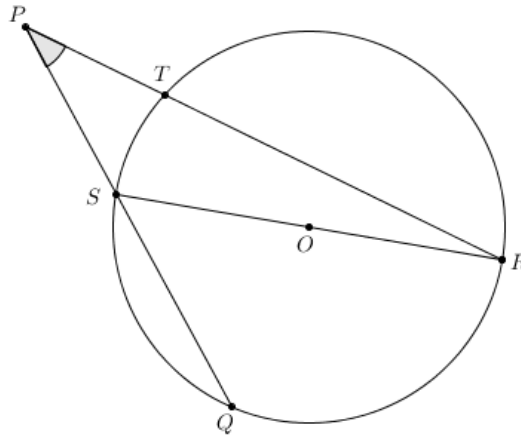


Figura 102. Ângulo convexo de vértice no exterior da circunferência

Prova. Consideremos a circunferência de centro O da figura e o ângulo QPR de vértice exterior à circunferência. Vamos mostrar que

$$Q\hat{P}R = \frac{\widehat{QR} - \widehat{ST}}{2}.$$

Como os ângulos QSR e SRT são inscritos à circunferência, pela Proposição 44, tem-se

$$Q\hat{S}R = \frac{\widehat{QR}}{2} \quad \text{e} \quad S\hat{R}T = \frac{\widehat{ST}}{2}.$$

Pela Proposição 8, soma dos ângulos internos do triângulo $[PSR]$ é 180° . Donde,

$$\widehat{SRP} + \widehat{RPS} + \widehat{PSR} = 180^\circ.$$

Mas

$$\widehat{PSR} = 180^\circ - \widehat{QSR},$$

ou seja,

$$\widehat{PSR} = 180^\circ - \frac{\widehat{QR}}{2}.$$

Assim, teremos

$$\frac{\widehat{ST}}{2} + \widehat{RPS} + 180^\circ - \frac{\widehat{QR}}{2} = 180^\circ,$$

ou de forma equivalente,

$$\widehat{RPS} = \frac{\widehat{QR}}{2} - \frac{\widehat{ST}}{2}.$$

Mas, $\widehat{RPS} = \widehat{QPR}$, donde,

$$\widehat{QPR} = \frac{\widehat{QR} - \widehat{ST}}{2}.$$

■

Proposição 51.

A soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência é igual a um ângulo raso.

Prova. Consideremos o quadrilátero $[ABCD]$ inscrito numa circunferência, como sugere a figura.

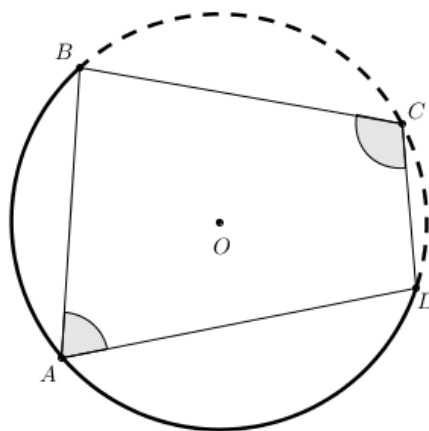


Figura 103. Quadrilátero inscrito numa circunferência

Pela Proposição 44, tem-se $\widehat{BCD} = 2 \times \widehat{BAD}$ e $\widehat{BAD} = 2 \times \widehat{BCD}$.

Uma vez que $\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = 360^\circ$, segue-se

$$2 \times \widehat{BAD} + 2 \times \widehat{BCD} = 360^\circ.$$

Donde, $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$. ■

1.4. Vetores, translações e isometrias.

“Os alunos do 2.º ciclo continuam o estudo das transformações geométricas iniciado no 1.º ciclo. No 3.º ciclo, partindo do que já foi realizado, os alunos alargam e sistematizam este estudo, e aprofundam o conceito de translação associando-o a vetores (...) O estudo do tema isometrias iniciado no 1.º ciclo e retomado no 2.º ciclo, aprofunda-se neste ciclo com o estudo de translação.

Faz-se também uma sistematização e comparação das propriedades das isometrias”.

In Programa de Matemática do Ensino Básico

1.4.1. Segmentos orientados

Qualquer semirreta tem uma reta suporte.

Definição. Duas semirretas com a mesma reta suporte *têm o mesmo sentido* se uma contém a outra. Duas semirretas com retas suportes distintas *têm o mesmo sentido* se forem paralelas e se estiverem contidas num mesmo semiplano determinado pelas respetivas origens.

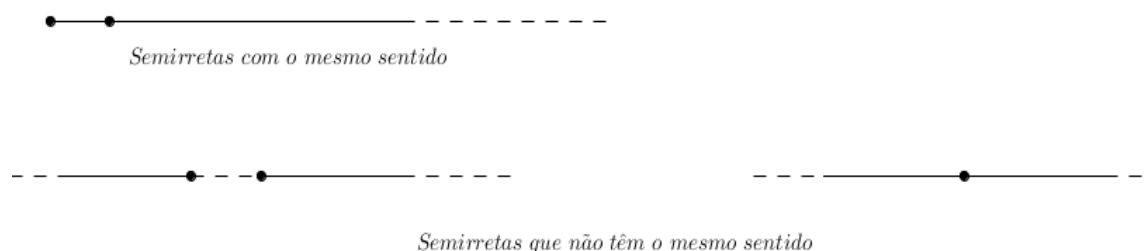


Figura 104. Semirretas com a mesma reta suporte

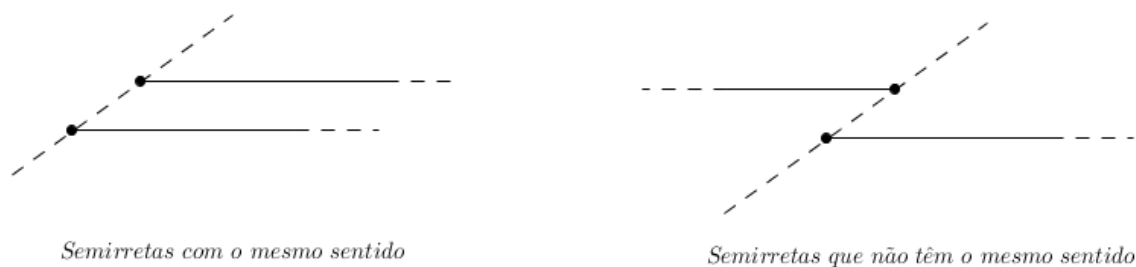


Figura 105. Semirretas com retas suporte distintas

Definição. Se a um segmento de reta atribuirmos um sentido obtemos um *segmento de reta orientado*.

O segmento de reta orientado de *origem* A e *extremidade* B representa-se por $[A, B]$.

Definição. Dois segmentos de reta orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ têm a *mesma direção* quando as respetivas retas suporte são estritamente paralelas ou coincidentes.

Dois segmentos de reta orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ têm a *mesma direção e o mesmo sentido* (ou simplesmente o mesmo sentido) quando as semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} tiverem o mesmo sentido.

Dois segmentos de reta orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ têm a *mesma direção e sentidos opostos* quando as semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} tiverem a mesma direção mas sentidos opostos.

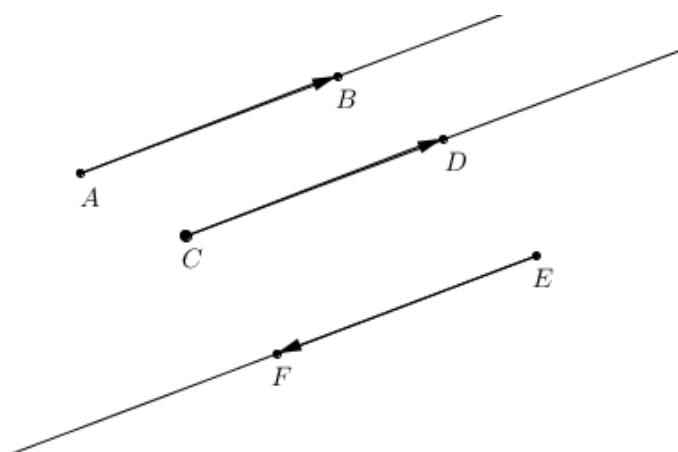


Figura 106. $[A, B]$ e $[C, D]$ têm a mesma direção e mesmo sentido; $[A, B]$ e $[E, F]$ têm a mesma direção e sentido oposto

Definição. O *comprimento* de um segmento de reta orientado $[A, B]$ é o comprimento do segmento de reta $[AB]$, ou seja, a distância entre as respectivas origem (A) e extremidade (B).

Definição. Dois segmentos de reta orientados são *equipolentes* quando têm a mesma direção, sentido e comprimento.

Proposição 52.

Os segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ de retas suporte distintas são equipolentes quando (e apenas quando) $[ABCD]$ é um paralelogramo.

Prova. Consideremos os segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ de retas suporte distintas r e s , respectivamente.

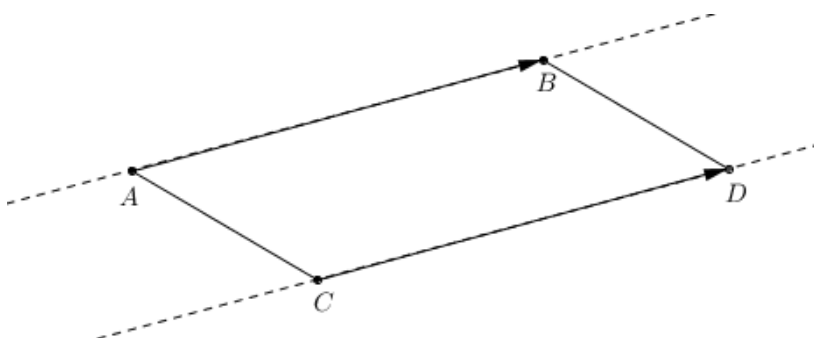


Figura 107. Segmentos orientados equipolentes

Suponhamos que os segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ são equipolentes. Como têm a mesma direção, os lados $[AB]$ e $[CD]$, do quadrilátero $[ABCD]$ são paralelos; como têm o mesmo sentido, os pontos B e D pertencem a um mesmo semiplano cuja fronteira é a reta AC . Assim, $[ABCD]$ é um trapézio.

Como $\overline{AB} = \overline{CD}$, então o trapézio tem bases congruentes e, pela Proposição 29, trata-se de um paralelogramo.

Suponhamos, agora, que $[ABCD]$ é um paralelogramo. Então, pela Proposição 25, os lados opostos $[AB]$ e $[CD]$ são congruentes.

Como AC e BD são retas estritamente paralelas não se interseitam, pelo que B e D estão no mesmo semiplano de fronteira AC , ou seja, as semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} têm o mesmo sentido.

Logo $[A, B]$ e $[C, D]$ são segmentos orientados com a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento, ou seja, equipolentes. ■

1.4.2. Vetores e suas propriedades

Definição. Um *vetor* é um ente matemático determinado por uma direção, um sentido e um comprimento. Assim, um vetor fica determinado por um segmento orientado de modo que segmentos orientados equipolentes determinem o mesmo vetor sendo esses segmentos orientados “representantes” do mesmo vetor.

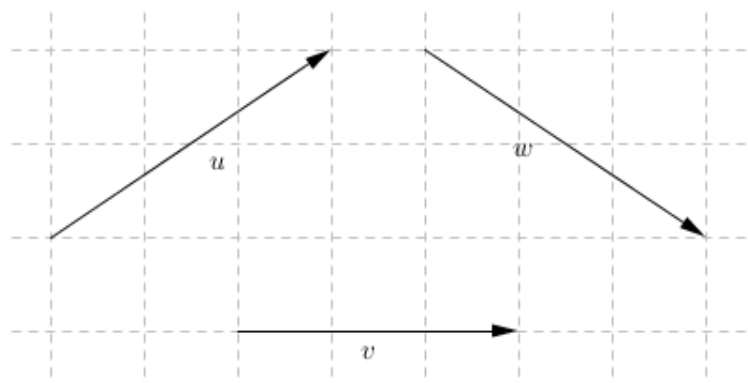


Figura 108. Vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w}

Representaremos por \overrightarrow{AB} o vetor determinado pelo segmento orientado $[A, B]$.

Definição. Dois vetores não nulos são *colineares* quando têm a mesma direção.

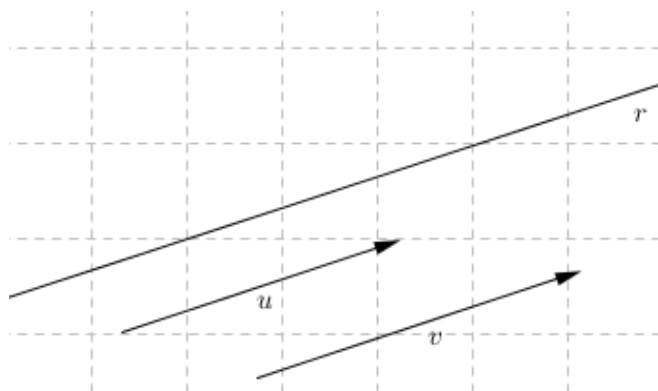


Figura 109. Vetores colineares

Definição. Dois vetores são *simétricos* quando têm a mesma direção, o mesmo comprimento e sentidos opostos.

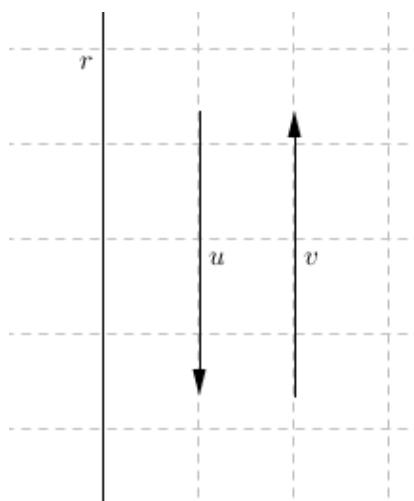


Figura 110. Vetores simétricos

Definição. (Regra do triângulo para a soma de vetores) Dados os vetores \vec{u} e \vec{v} , a soma de \vec{u} com \vec{v} é o vetor $\vec{s} = \overrightarrow{AC}$, considerando para \vec{u} um representante \overrightarrow{AB} e para \vec{v} um representante \overrightarrow{BC} :

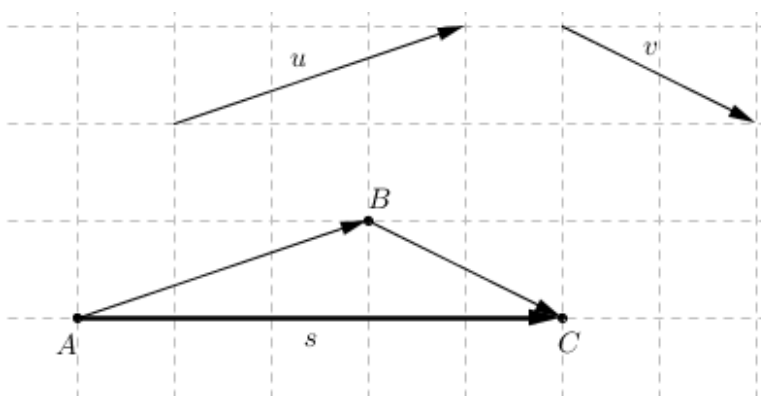


Figura 111. Regra do triângulo: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$

Definição. (Regra do paralelogramo para a soma de vetores) Dados os vetores \vec{u} e \vec{v} , a soma de \vec{u} com \vec{v} é o vetor $\vec{s} = \overrightarrow{AC}$, considerando para \vec{u} um representante \overrightarrow{AB} , para \vec{v} um representante \overrightarrow{AD} , e sendo C o ponto de interseção entre a reta paralela a \vec{v} , passando na extremidade B , e a reta paralela a \vec{u} , passando na extremidade D .

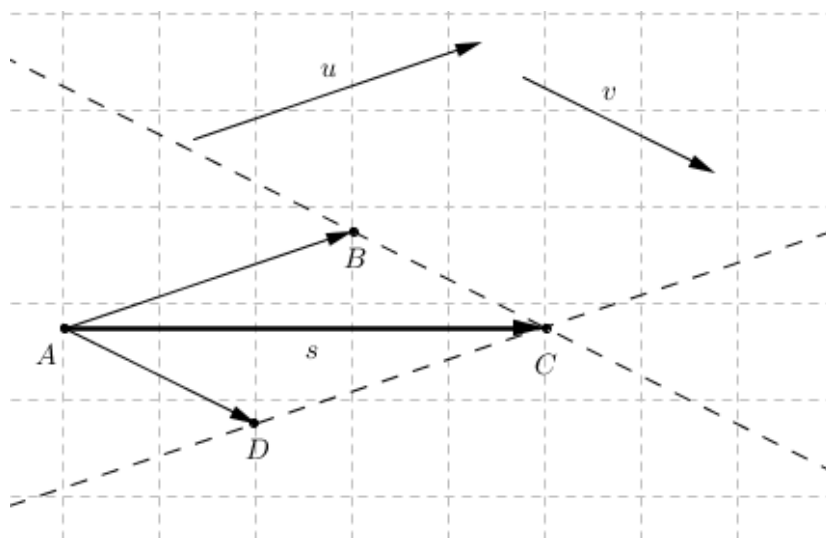


Figura 112. Regra do paralelogramo: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$

Proposição 53.

Dados um ponto P e um vetor \overrightarrow{AB} , existe um único ponto Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.

O ponto Q é a soma de P com \overrightarrow{AB} , ou seja, $Q = P + \overrightarrow{AB}$.

Prova. Consideremos três casos possíveis:

- i. A e B não coincidentes e P não pertencente a AB ;
 - ii. A e B não coincidentes e P pertencente a AB ;
 - iii. A e B coincidentes.
- i. Como os pontos A, B, P não pertencem à mesma reta, a reta que passa em P e é paralela à reta AB e a reta que passa em B e é paralela à reta AP interseccionam-se num único ponto. Seja Q esse ponto.

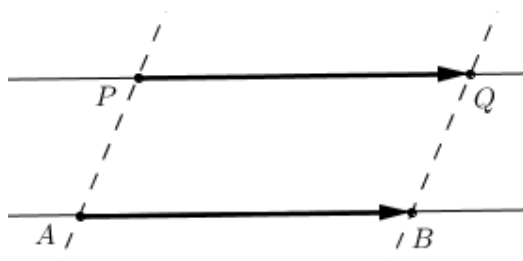


Figura 113. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$ (caso i)

O quadrilátero $[ABQP]$ é um paralelogramo, pois tem os lados opostos paralelos e, portanto, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.

ii. Como os pontos A, B e P pertencem à mesma reta, existem dois (e apenas dois) pontos Q_1 e Q_2 tais que $\overrightarrow{PQ_1} = \overrightarrow{PQ_2} = \overrightarrow{AB}$, um em cada semirreta de reta-suporta AB e origem P .

Apenas para um deles, seja Q , as semirretas AB e PQ têm o mesmo sentido, obtendo-se, portanto, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.



Figura 114. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$ (caso ii)

iii. Se A e B são coincidentes, o vetor \overrightarrow{AB} é o vetor nulo.



Figura 115. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$ (caso iii)

O único ponto Q para o qual $\overrightarrow{PQ} = \vec{0}$, por definição, é o próprio ponto P . ■

Proposição 54. (Propriedade comutativa da adição de vetores)

Quaisquer que sejam os vetores \vec{u} e \vec{v} , tem-se $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Prova. Utilizaremos a regra do paralelogramo para a adição de vetores.

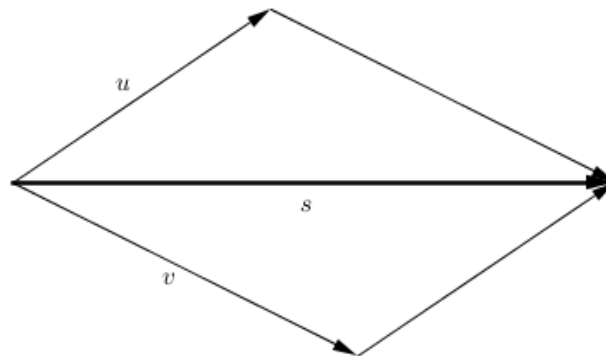


Figura 116. Propriedade comutativa $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Proposição 55. (Propriedade associativa da adição de vetores)

Quaisquer que sejam os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , tem-se $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

Prova. Utilizaremos a regra do triângulo para a adição de vetores, como sugere a figura, em que

$$\vec{s}_1 = \vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{s}_2 = \vec{v} + \vec{w} \quad \text{e} \quad \vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{w} = \vec{u} + \vec{s}_2.$$

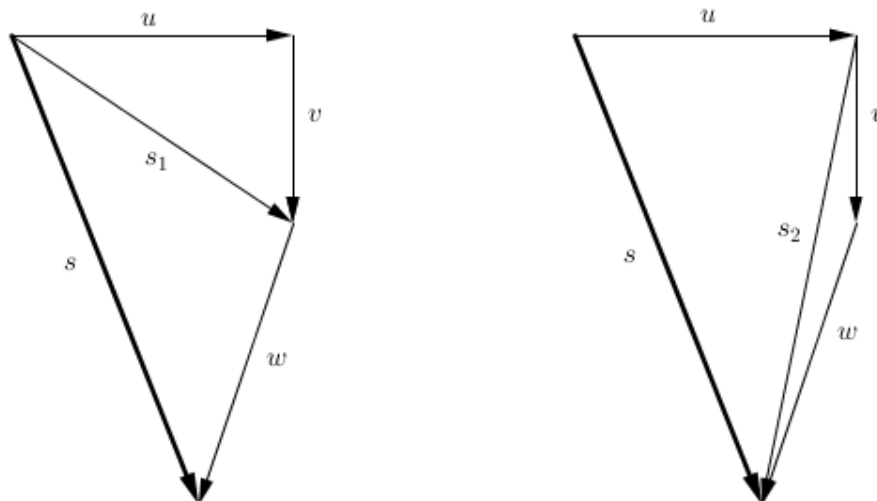


Figura 117. Propriedade associativa $\vec{s} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

■

Proposição 56. (Existência de elemento neutro da adição de vetores)

Qualquer que seja o vetor \vec{u} , tem-se $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

Prova. Seja \overrightarrow{AB} um representante para \vec{u} e \overrightarrow{BB} um representante para $\vec{0}$. Assim,

$$\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}.$$

O vetor nulo é o elemento neutro da adição de vetores.

■

Proposição 57. (Existência de simétrico para cada vetor)

Qualquer que seja o vetor \vec{u} , tem-se $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

Prova. Seja \overrightarrow{AB} um representante para \vec{u} . O vetor simétrico de \vec{u} tem a mesma direção, o mesmo comprimento mas sentidos contrários. Assim, $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$.

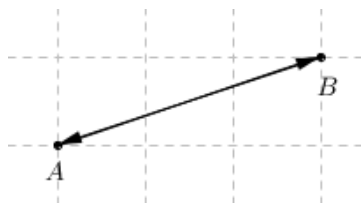


Figura 118. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Donde, $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. ■

1.4.3. Isometrias

Definição. Uma *translação segundo o vetor \vec{u}* é uma aplicação que a um ponto P associa o ponto $P_1 = P + \vec{u}$; representa-se por $T_{\vec{u}}$ e P_1 é a imagem de P pela translação $T_{\vec{u}}$, ou seja, $P_1 = T_{\vec{u}}(P)$.

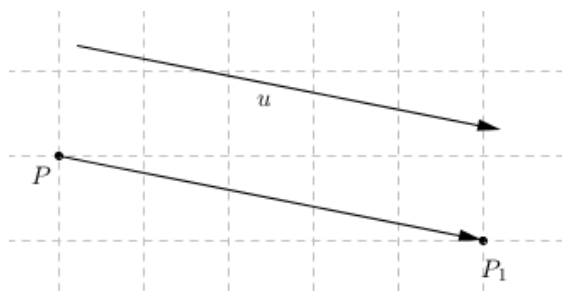


Figura 119. Translação do ponto P segundo o vetor \vec{u}

Definição. Dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} , a *composta da translação $T_{\vec{v}}$ com a translação $T_{\vec{u}}$* é a translação que consiste em aplicar $T_{\vec{u}}$ a um ponto P e, em seguida, $T_{\vec{v}}$ ao ponto $T_{\vec{u}}(P)$ e representa-se por $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$.

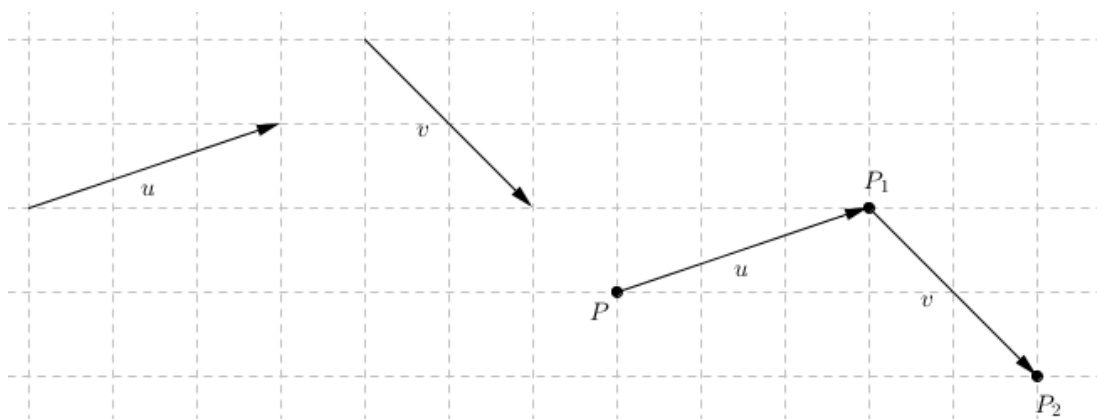


Figura 120. Composta de translações 1

Assim, dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} e um ponto P , tem-se

$$(T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}})(P) = (P + \vec{u}) + \vec{v}.$$

Verifica-se, ainda, que

$$(T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}})(P) = T_{\vec{u}+\vec{v}}(P) = P + (\vec{u} + \vec{v}),$$

usando a regra do triângulo para obter o vetor $\vec{u} + \vec{v}$.

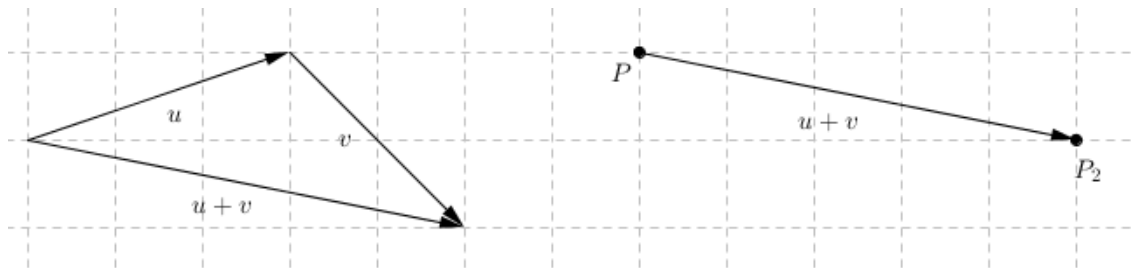


Figura 121. Composta de translações 2

Definição. A *reflexão axial*, de eixo r , é a transformação geométrica que faz corresponder a cada ponto P do plano um ponto P_1 (imagem de P), tal que:

- i. se o ponto P pertence ao eixo r , então P_1 coincide com P ;
- ii. se o ponto P não pertence ao eixo r , então r é perpendicular ao segmento de reta $[PP_1]$ passando no seu ponto médio.

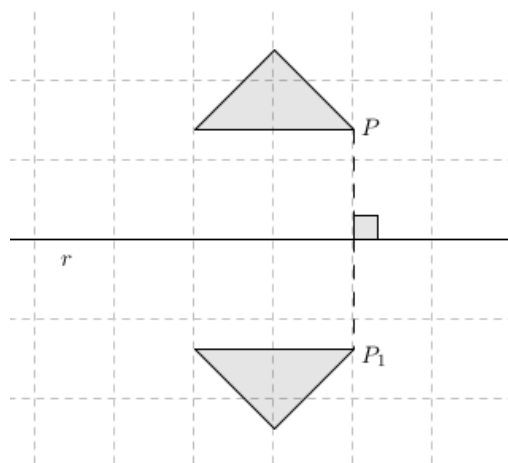


Figura 122. Reflexão de um triângulo segundo o eixo r

Definição. Dada uma reflexão R , de eixo r e um vetor \vec{u} , não nulo, com a direção da reta r , a composta da translação $T_{\vec{u}}$ com a reflexão R , designa-se por *reflexão deslizante*.

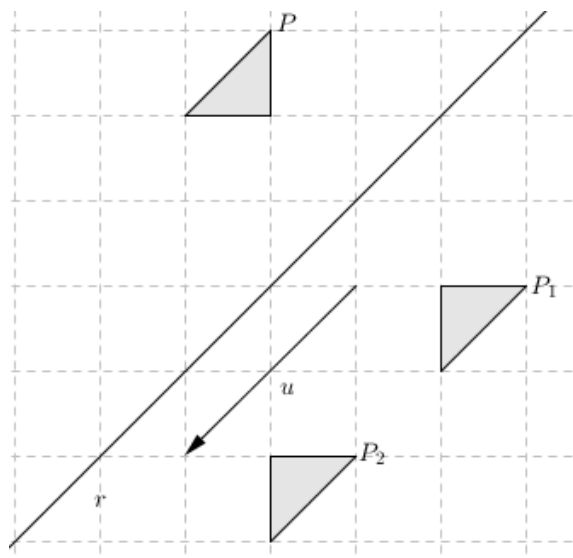


Figura 123. Reflexão deslizante de um triângulo segundo o eixo r e o vetor \vec{u}

Definição. Dados um ponto O e um ângulo de amplitude α , chama-se *rotação de centro O e amplitude α* à transformação geométrica que a um ponto P faz corresponder um ponto P' , tal que a distância de O a P é igual à distância de O a P' , ou seja, $\overline{OP} = \overline{OP'}$ e $\widehat{POP'} = \alpha$.

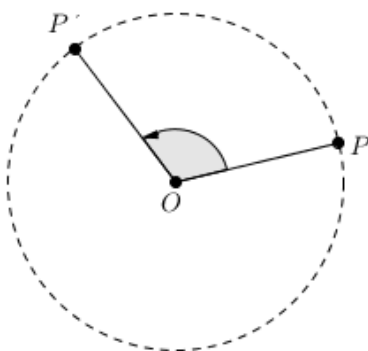


Figura 124. Rotação de centro O e amplitude α

Definição. *Isometria* é uma transformação geométrica que conserva distâncias, isto é, a distância entre dois pontos é igual à distância entre os seus transformados.

Proposição 58.

As translações são isometrias que preservam a direção e o sentido dos segmentos orientados.

Prova. Consideremos um vetor \vec{u} e M, N dois pontos, tais que \vec{u} e \overrightarrow{MN} não têm a mesma direção. Consideremos, ainda, os transformados de M e N pela translação segundo o vetor \vec{u} , respectivamente, M_1 e N_1 .

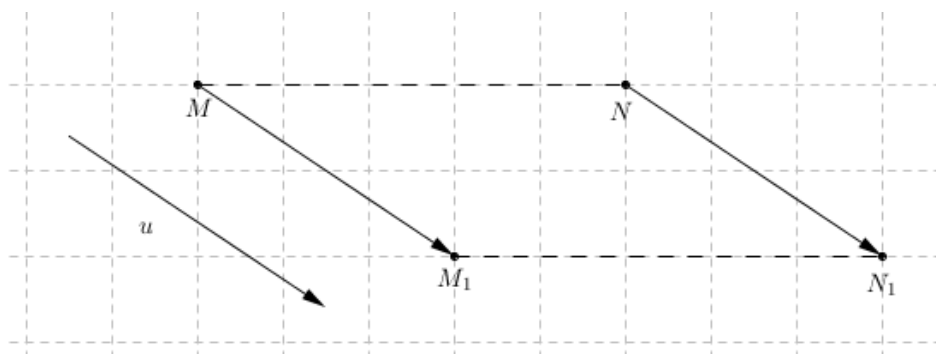


Figura 125. Propriedade das isometrias 1

Sabemos que $\vec{u} = \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{NN_1}$. Logo $[MM_1NN_1]$ é um paralelogramo e, pela Proposição 53, $[M, N]$ e $[M_1, N_1]$ são equipolentes.

Concluimos, portanto, que a translação segundo o vetor \vec{u} é uma isometria (pois $\overline{MN} = \overline{M_1N_1}$) que preserva a direção e o sentido dos segmentos orientados. ■

Proposição 59.

As isometrias transformam retas em retas.

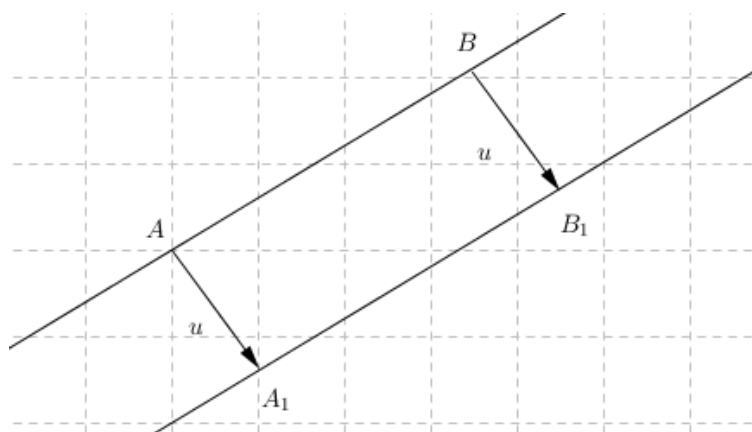


Figura 126. Propriedades das isometrias 2

Prova. Consideremos a reta r que contém dois pontos distintos, A e B .

Sejam A_1 e B_1 os transformados de A e B , respetivamente, por uma isometria qualquer. Seja r_1 a reta que contem os pontos A_1 e B_1 .

Seja X um ponto qualquer de r , distinto A e B . Pelo Axioma 3, um dos três pontos A, B, X está entre os outros dois.

Suponhamos que X está entre A e B . Pelo Axioma 8, tem-se

$$\overline{AB} = \overline{AX} + \overline{XB}.$$

Seja X_1 o transformado de X pela mesma isometria considerada. Como uma isometria preserva distâncias, então

$$\overline{A_1B_1} = \overline{AB} = \overline{AX} + \overline{XB} = \overline{A_1X_1} + \overline{X_1B_1},$$

ou seja, X_1 pertence ao segmento $[A_1B_1]$. Assim, os pontos A_1, B_1 e X_1 são colineares, ou seja, estão sobre a mesma reta r_1 .

Analogamente, provaríamos os outros casos. ■

Proposição 60.

As isometrias preservam a amplitude dos ângulos.

Prova. Consideremos um ângulo AOB e os transformados A_1, B_1 e O_1 por uma isometria dos pontos A, B e O , respetivamente.

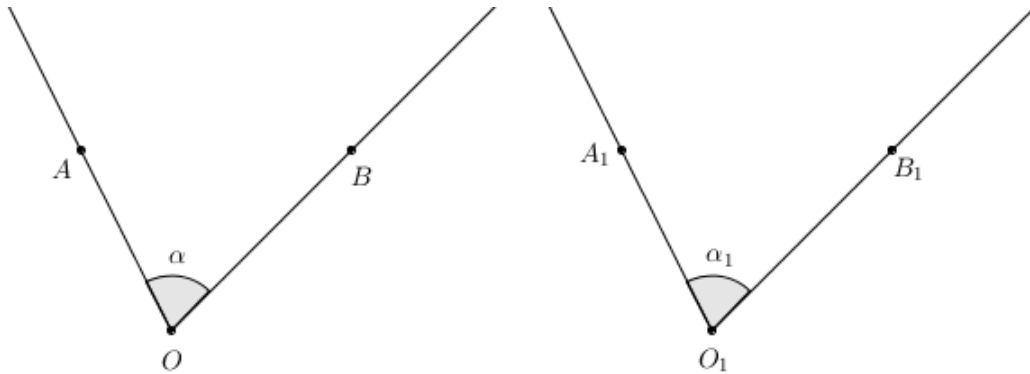


Figura 127. Propriedades das isometrias 3

Tratando-se de uma isometria, temos

$$\overline{AO} = \overline{A_1O_1}, \quad \overline{OB} = \overline{O_1B_1} \quad \text{e} \quad \overline{AB} = \overline{A_1B_1}.$$

Pelo critério de congruência *LLL*, Proposição 11, os triângulos $[AOB]$ e $[A_1O_1B_1]$ são congruentes, e, assim, os ângulos AOB e $A_1O_1B_1$ têm a mesma amplitude. ■

As únicas isometrias do plano são as translações, rotações, reflexões e reflexões deslizantes.

Definição. Uma figura tem *simetria* quando a sua imagem, através de uma isometria diferente da identidade, coincide com a figura original.

Uma figura tem *simetria de reflexão* se o transformado da figura por uma reflexão é a própria figura.

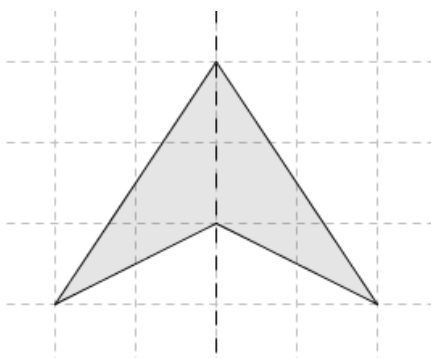


Figura 128. Simetria de reflexão

Uma figura tem uma *simetria de rotação* se a sua transformada por uma rotação, distinta da própria identidade, é a própria figura. Essa rotação é em torno de um ponto fixo, chamado de *centro de simetria* de rotação, com uma amplitude superior a 0° e inferior a 360° .

Se a única rotação que torna a figura globalmente invariante é a correspondente a uma volta completa (rotação de 360°), diz-se que a figura *não tem simetria de rotação*.

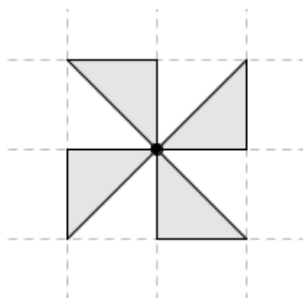


Figura 129. Simetrias de rotação

Uma figura tem uma *simetria de translação* se o transformado da figura por uma translação de vetor não nulo é a própria figura.

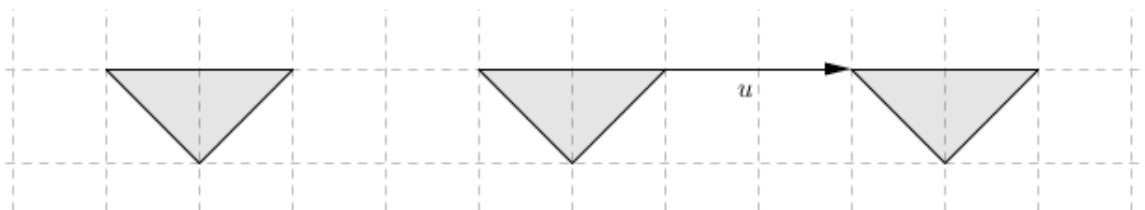


Figura 130. Simetria de translação

Uma figura tem uma *simetria de reflexão deslizante*, se o transformado da figura por uma reflexão deslizante é a própria figura.

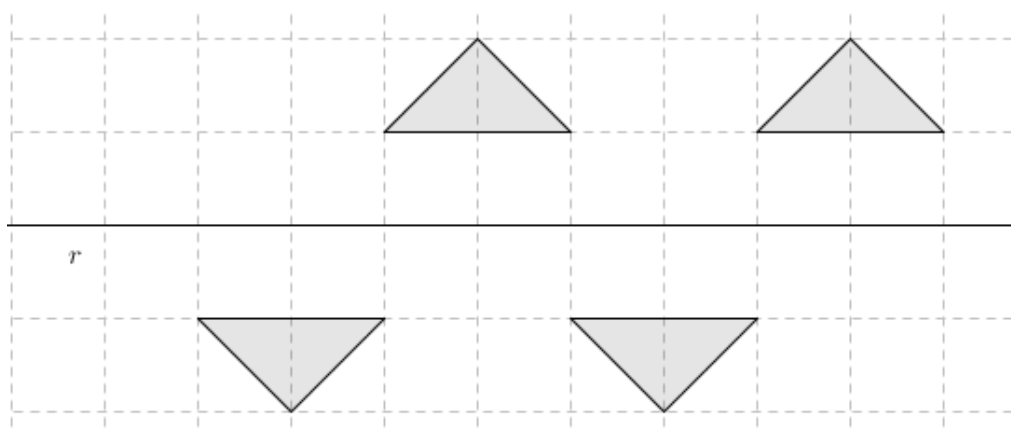


Figura 131. Simetria de reflexão deslizante

1.5. Trigonometria

O termo *trigonometria* está associado a três radicais gregos: *tri* que significa três, *gonos* que significa ângulo e *metron* que significa medida. A Trigonometria era originalmente parte da Matemática que tratava de medidas no triângulo (cálculo de lados e ângulos) e surgiu, por exemplo, através do estudo da astronomia e navegação por diferentes estudiosos. Pouco se sabe sobre a sua origem, no entanto, há alguns registros com texto escrito entre 1900 e 1600 a.C., onde foram localizados problemas envolvendo secantes. Os egípcios e os babilônios contribuíram bastante para a descoberta e aprimoramento deste ramo da Matemática tão relevante nessa época e nos dias atuais.

Euclides, na sua obra *Os Elementos*, apresentou alguns conceitos trigonométricos, todavia representados através de formas geométricas.

Hiparco de Nicéia, na segunda metade do século II a.C., fez grandes descobertas no âmbito da Trigonometria, apresentando um tratado com cerca de 12 volumes alusivo a este tema, o que lhe consagrou o título de *Pai da Trigonometria*.

Também Ptolomeu de Alexandria, astrónomo e matemático, contribuiu para o estudo deste assunto, tendo escrito uma das obras matemáticas mais influentes da antiguidade, a *Syntaxis Mathematica*, contemplando 13 livros relacionados com a Trigonometria.

1.5.1. Razões trigonométricas

Dado um ângulo agudo qualquer, de amplitude α , é possível construir um triângulo retângulo $[ABC]$ de modo que a amplitude de um dos seus ângulos internos seja α .

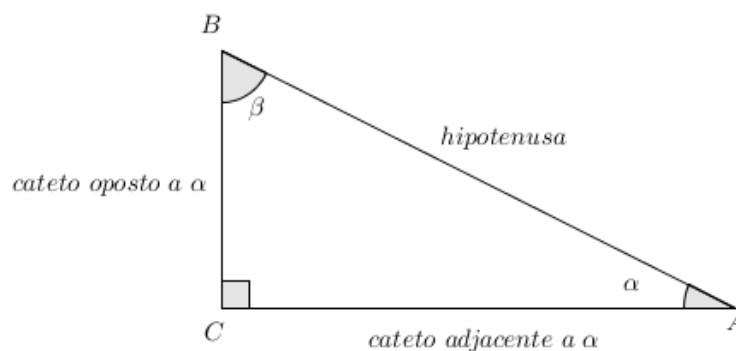


Figura 132. Cateto oposto, cateto adjacente ao ângulo α e hipotenusa do triângulo retângulo

Definição. À razão entre o comprimento do cateto oposto ao ângulo α e o comprimento da hipotenusa do triângulo damos o nome de *seno de α* e denotamos por $\text{sen } \alpha$.

O *cosseno de α* , simbolicamente $\text{cos } \alpha$, é a razão entre o comprimento do cateto adjacente ao ângulo α e o comprimento da hipotenusa do triângulo.

A *tangente de α* , que denotamos por $\text{tan } \alpha$, é o quociente do comprimento do cateto oposto ao ângulo α e o comprimento do cateto adjacente.

Estas razões, designadas por *razões trigonométricas de α* , apenas dependem de α e não do triângulo retângulo considerado.

Com efeito, se observássemos outro triângulo retângulo com um ângulo interno de amplitude α , verificaríamos que seria semelhante ao inicial, pelo critério de semelhança de triângulos AA, Proposição 12. Assim, os lados correspondentes dos triângulos seriam proporcionais.

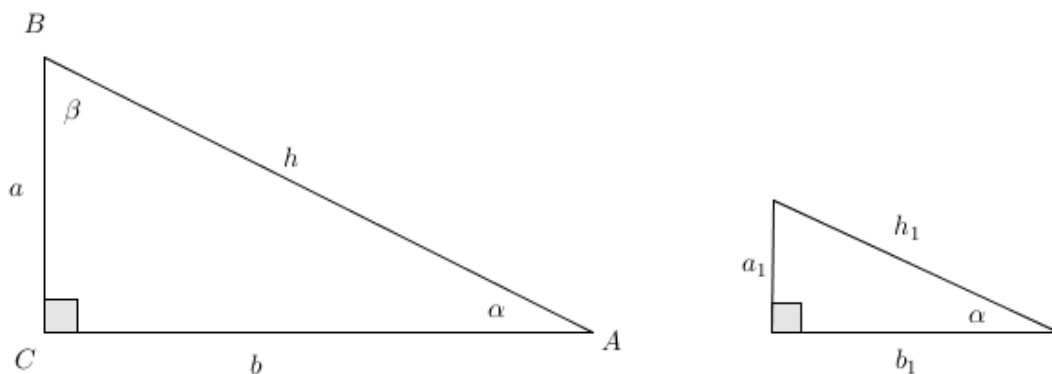


Figura 133. Triângulos retângulos semelhantes de razão r

Os triângulos são semelhantes de razão r , logo

$$a_1 = ra, \quad b_1 = rb \quad \text{e} \quad h_1 = rh.$$

Calculemos as razões trigonométricas de α no triângulo mais pequeno.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a_1}{h_1} = \frac{ra}{rh} = \frac{a}{h},$$

$$\cos \alpha = \frac{b_1}{h_1} = \frac{rb}{rh} = \frac{b}{h},$$

$$\tan \alpha = \frac{a_1}{b_1} = \frac{ra}{rb} = \frac{a}{b}.$$

Verificamos, assim, que as razões trigonométricas não dependem do triângulo.

Atendendo ao facto de, num triângulo retângulo, o comprimento da hipotenusa ser sempre maior que qualquer um dos catetos, podemos concluir que

$$0 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1,$$

$$0 \leq \cos \alpha \leq 1,$$

$$\tan \alpha \geq 0.$$

1.5.2. Relações entre razões trigonométricas

Existem várias relações entre as razões trigonométricas de um determinado ângulo. Atendendo ao nível de ensino que estamos a tratar, analisaremos as mais óbvias.

Proposição 61. (Fórmula Fundamental de Trigonometria)

Num triângulo retângulo,

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\operatorname{cos} \alpha)^2 = 1,$$

qualquer que seja o ângulo agudo de amplitude α .

Prova. Consideremos o triângulo retângulo da figura.

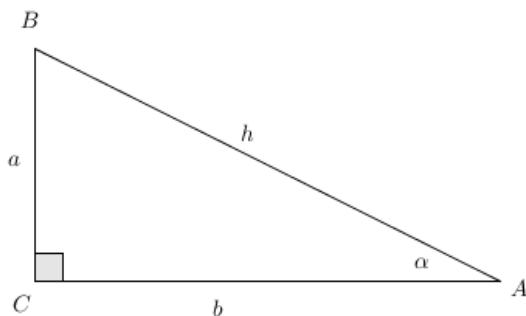


Figura 134. Triângulo retângulo em C

Temos

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{h} \Leftrightarrow a = h \operatorname{sen} \alpha,$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{b}{h} \Leftrightarrow b = h \operatorname{cos} \alpha.$$

Pelo Teorema de Pitágoras⁶,

$$a^2 + b^2 = h^2.$$

Substituindo a e b , temos que

$$h^2 (\operatorname{sen} \alpha)^2 + h^2 (\operatorname{cos} \alpha)^2 = h^2.$$

Como $h \neq 0$, podemos dividir ambos os membros por h^2 , obtendo-se

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\operatorname{cos} \alpha)^2 = 1. \quad \blacksquare$$

⁶ Enunciado no Capítulo 2

Proposição 62.

A tangente de um ângulo agudo é igual à razão entre os respectivos seno e cosseno.

Prova. Considerando o triângulo $[ABC]$ da Figura 134, tem-se

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}.$$

Calculemos o quociente entre o seno e o cosseno do ângulo agudo α .

Assim,

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{h}}{\frac{b}{h}} = \frac{ah}{bh} = \frac{a}{b} = \tan \alpha.$$

Temos, portanto,

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

qualquer que seja o ângulo agudo α . ■

Proposição 63.

Num triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de um ângulo complementar, o cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno de um ângulo complementar e a tangente de um ângulo agudo é igual ao inverso da tangente do seu complementar.

Prova. Consideremos o triângulo retângulo $[ABC]$ da figura.

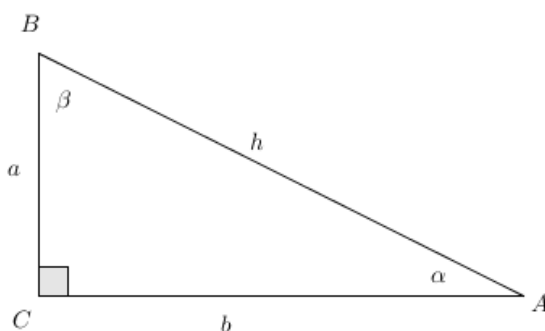


Figura 135. Triângulo retângulo em C e ângulos complementares α e β

Calculemos, agora, as razões trigonométricas dos ângulos agudos α e β :

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{a}{h}, & \cos \alpha &= \frac{b}{h}, & \tan \alpha &= \frac{a}{b}, \\ \operatorname{sen} \beta &= \frac{b}{h}, & \cos \beta &= \frac{a}{h}, & \tan \beta &= \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Verificamos, assim, que

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \operatorname{sen} \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}.$$

Como α e β são ângulos complementares ou, de forma equivalente, $\beta = 90^\circ - \alpha$, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \cos (90^\circ - \alpha), \\ \cos \alpha &= \operatorname{sen} (90^\circ - \alpha), \\ \tan \alpha &= \frac{1}{\tan (90^\circ - \alpha)}, \end{aligned}$$

como pretendido. ■

TEOREMA DE PITÁGORAS

Dedicaremos este capítulo ao Teorema de Pitágoras e apresentaremos algumas das suas diversas demonstrações. A tradição matemática ocidental, durante longo tempo, atribuiu a descoberta deste teorema a Pitágoras, no entanto, há indícios de que o teorema já era conhecido pelos babilónios, cerca de 1500 a.C. e pensa-se que pelos chineses também, por volta 1100 a.C.. Os gregos, no entanto, generalizaram esse resultado e apresentaram a sua prova.

Pitágoras terá nascido numa data que se situa entre 590 a 570 a.C. numa pequena ilha grega, situada no mar Egeu, chamada Samos. É hoje reconhecido como um dos primeiros matemáticos da antiguidade, a quem se deve, talvez, a originalidade da demonstração do famoso “Teorema de Pitágoras”.

Sendo também reconhecido como o primeiro filósofo, Pitágoras teve um percurso de vida muito rico em conhecimentos que procurou nos templos egípcios e na Mesopotâmia, acreditando serem a base da sabedoria e que viriam mais tarde a constituir os fundamentos dos seus ensinamentos. Viveu cerca de duas décadas no Egito, tendo visitado, ainda, lugares considerados de conhecimento, com a Babilónia, o Indostão e a Pérsia, onde entrou em contacto com outros matemáticos. Posteriormente fundou, em Crotona, a Escola Pitagórica, determinante para a evolução da Matemática e da Filosofia, que se tornou reconhecida como o mais importante centro de conhecimento da Europa nessa época.

Terá sido Pitágoras quem usou a palavra “Matemática” pela primeira vez e definiu-a como sendo um pensamento baseado em provas dedutivas, não existindo testemunhos de que antes de si alguém tenha praticado este tipo de raciocínio. Por este facto, foi considerado o primeiro matemático puro e a ele se deve a construção da Matemática como uma ciência.

Pitágoras e os seus alunos da Escola Pitagórica começaram por estudar aquilo que ele considerava ser a essência da Matemática, o Número, mas, as suas maiores descobertas encontram-se no domínio da Geometria, especialmente nas relações entre os lados de um triângulo retângulo. Alunos e mestre também se dedicaram à construção de sólidos tais como tetraedro, octaedro, dodecaedro, entre outros, devendo-se a Pitágoras a descoberta de várias propriedades dos poliedros regulares.

O Teorema de Pitágoras é de fundamental importância na Geometria Euclidiana (47ª Proposição do 1.º *Livro dos Elementos* de Euclides) onde serve de base à definição de distância entre dois pontos.

É talvez o teorema mais famoso da história da Matemática e, na leccionação desta disciplina em Portugal, é apresentado de diversas formas ao longo dos vários ciclos de ensino.

No nível pré-primário, com o uso de jogos didáticos, nomeadamente o Tangram (quebra cabeças chinês formado por sete peças: cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo cujo objetivo é formar um quadrado), a criança pode construir várias figuras, ocupando na totalidade um determinado espaço, utilizando todas as peças e sem as sobrepor.

No 1.º ciclo do Ensino Básico são adquiridos alguns conhecimentos de Geometria, tais como conceito de área de polígonos, medição de ângulos, classificação de ângulos e de triângulos e construção de triângulos, posteriormente aprofundados no 2.º ciclo.

Estes conhecimentos são fundamentais para que se possa enunciar o Teorema de Pitágoras, no 3.º ciclo, usado essencialmente para descobrir a medida de um lado de um triângulo retângulo, conhecidas as medidas de dois dos seus lados, e como

cálculo auxiliar na determinação de áreas e volumes. É também usado na dedução da expressão que permite calcular o comprimento da diagonal espacial de um paralelepípedo retângulo.

No decorrer do Ensino Secundário, o Teorema de Pitágoras está presente, não de uma forma direta, mas como passo intermédio, em tópicos como a Geometria Analítica, Cálculo Vetorial, Trigonometria ou Números Complexos.

2.1. Teorema e algumas demonstrações

Conta a lenda que Pitágoras, ao olhar para o chão, onde apareciam desenhos, verificou, por composição e decomposição de figuras, uma propriedade de todos os triângulos retângulos:

“A área de um quadrado construído sobre a hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto) de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos (os outros dois lados)”.

Desta relação surgiu o **Teorema de Pitágoras** (na forma original):

Um triângulo tem um ângulo reto se e só se a área do quadrado no lado oposto a esse ângulo for igual à soma das áreas dos quadrados dos outros lados.

Pensa-se que Pitágoras terá *demonstrado* o teorema enunciado, considerando um triângulo retângulo de lados de comprimento 3, 4 e 5 unidades.

Começamos, então, por construir quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo de catetos a , b e hipotenusa c .

Estrategicamente, dividimos os quadrados em quadrados menores, fixando uma unidade de área.

De seguida, calculamos as áreas A_a , A_b , A_c dos três quadrados construídos, respetivamente, sobre os lados a , b , c do triângulo retângulo. Facilmente constatamos, como sugere a figura seguinte, que

$$A_a + A_b = A_c.$$

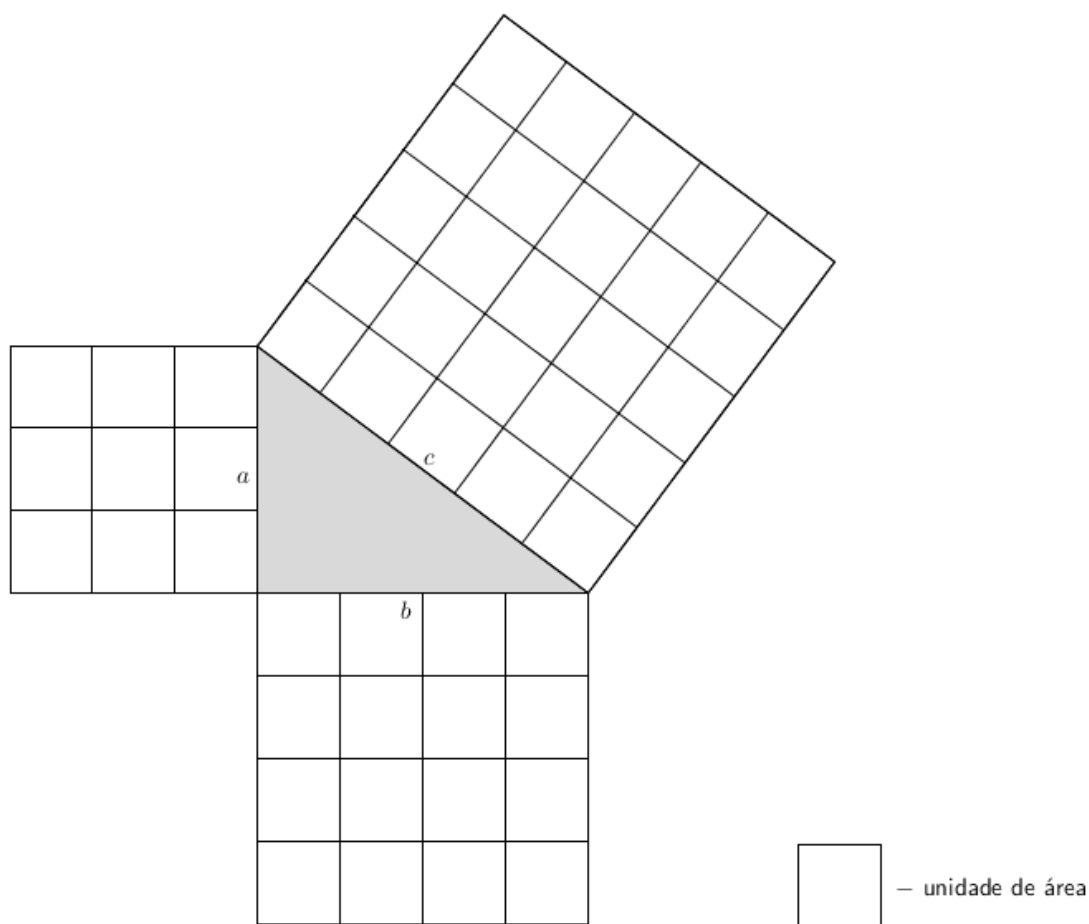


Figura 136. Demonstração original do Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras, atualmente, é enunciado de uma forma mais simples.

A demonstração exibida a seguir assenta na semelhança de triângulos e permite ilustrar como as conexões estabelecidas entre conteúdos, sem relação evidente entre si, conferem à Matemática, constituída por uma complexa rede de relações, uma unidade muito particular.

Teorema de Pitágoras

Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Prova. Consideremos o triângulo $[ABC]$, retângulo em A , cuja altura relativa à hipotenusa é $[AH]$.

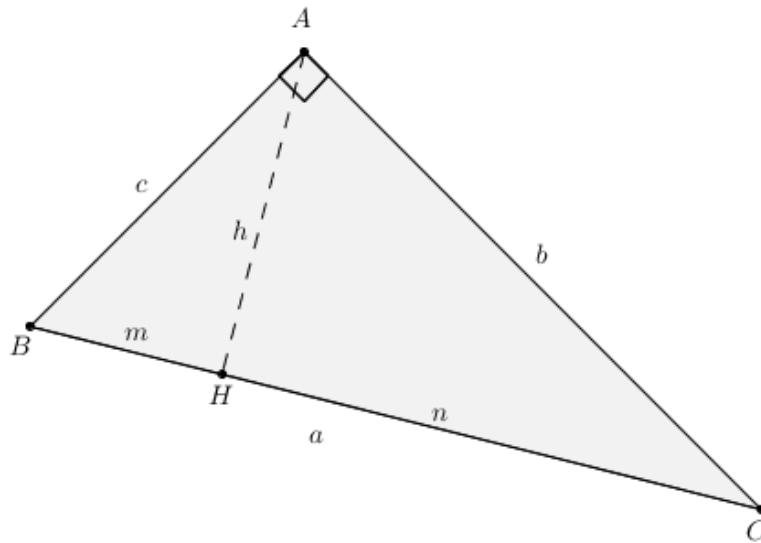


Figura 137. Triângulo retângulo em A e altura h relativa à hipotenusa

Atendendo às letras da figura, iremos provar que

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Sabemos, pela Proposição 15, que a altura de um triângulo retângulo referente à hipotenusa decompõe esse triângulo retângulo noutros dois triângulos retângulos, semelhantes entre si e também semelhantes ao triângulo inicial.

Sendo os triângulos $[ABC]$ e $[AHC]$ semelhantes, as medidas dos lados correspondentes são diretamente proporcionais:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n},$$

ou seja, $b^2 = an$.

Sendo os triângulos $[ABC]$ e $[AHB]$ semelhantes, as medidas dos lados correspondentes são diretamente proporcionais:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m},$$

ou seja, $c^2 = am$.

Donde, podemos escrever que

$$b^2 + c^2 = an + am = a(n + m).$$

Mas, por observação da figura,

$$n + m = a,$$

pelo que

$$b^2 + c^2 = a^2.$$



Recíproco do Teorema de Pitágoras

Um triângulo cujas medidas dos lados sejam a , b e c , reais positivos, tais que

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

é retângulo no vértice oposto ao lado da medida de a .

Prova. Seja $[ABC]$ um triângulo, tal que

$$\overline{AB} = c, \quad \overline{BC} = a, \quad \overline{CA} = b \quad \text{e} \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que $c \leq a$.

Queremos provar que $\hat{B}AC = 90^\circ$.

Consideremos o ponto H que é a projeção ortogonal do ponto B sobre a reta AC .

Mostramos que os casos i. e ii. seguintes não podem ocorrer.

i. Supomos, primeiro, que $\hat{B}AC < 90^\circ$. Assim, o ponto H pertence ao lado $[AC]$.

Seja $\overline{AH} = m$, de tal modo que

$$\overline{HC} = b - m,$$

e seja $\overline{BH} = h$.

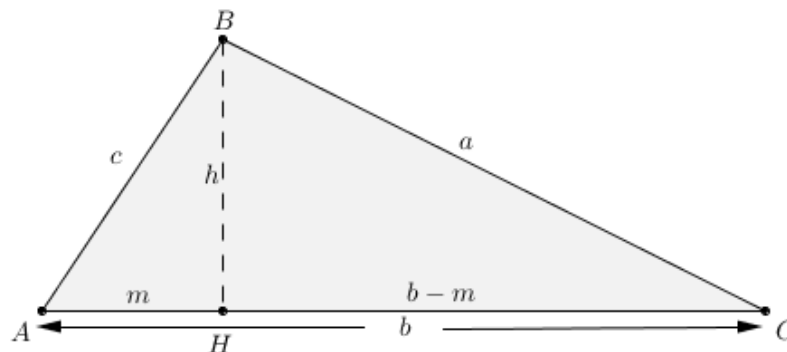


Figura 138. Esquema 1 auxiliar à prova do Recíproco do Teorema de Pitágoras

Como o triângulo $[BAH]$ é retângulo, temos

$$c^2 = h^2 + m^2.$$

Como o triângulo $[CBH]$ é retângulo, temos

$$a^2 = h^2 + (b - m)^2,$$

ou, de forma equivalente,

$$a^2 = h^2 + b^2 - 2bm + m^2$$

$$\begin{aligned}
&= c^2 + b^2 - 2bm \\
&< c^2 + b^2,
\end{aligned}$$

o que contradiz a condição inicial.

ii. Supomos que $\hat{BAC} > 90^\circ$. Agora, o ponto H não pertence ao lado $[AC]$, mas ao seu prolongamento.

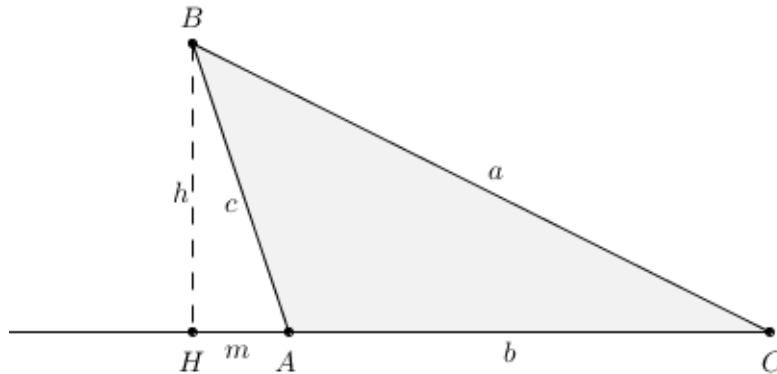


Figura 139. Esquema 2 auxiliar à prova do Recíproco do Teorema de Pitágoras

Procedendo de modo análogo ao do caso anterior, chegaríamos à igualdade

$$a^2 = c^2 + b^2 + 2bm.$$

Donde

$$a^2 > c^2 + b^2,$$

novamente contradizendo a condição inicial.

Assim, a condição $a^2 = b^2 + c^2$ implica necessariamente que $\hat{BAC} = 90^\circ$. ■

2.2. Provas sem palavras do Teorema de Pitágoras

Para o Teorema de Pitágoras, o mais famoso da Geometria Plana, há um leque muito variado de demonstrações. Nesta seção abordaremos, apenas, algumas dessas demonstrações, essencialmente geométricas, desde as mais simples até às mais elaboradas, a maioria das quais foi retirada de [28] ou de manuais escolares do 8.º ano.

2.2.1. Prova de Bhaskara

Bhaskara, matemático indiano (1114–1185), apresentou uma prova do Teorema de Pitágoras através da decomposição de um quadrado.

Pensa-se que teria apenas desenhado a figura e escrito "Veja!", sem dar maiores explicações.

O quadrado maior Q_M de medida do lado c é decomposto em quatro triângulos retângulos congruentes, com medidas dos catetos a , b e medida da hipotenusa c , e num quadrado mais pequeno Q_m de lado $a - b$.

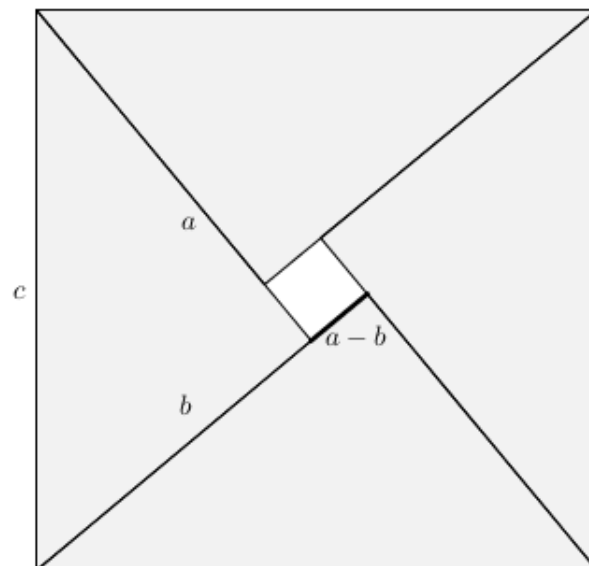


Figura 140. Prova de Bhaskara

Após uma breve observação da figura,

$$A_{Q_M} = 4 \times A_{\text{Triângulo}} + A_{Q_m}$$

e mediante alguns cálculos elementares,

$$\begin{aligned} c^2 &= 4 \times \frac{ab}{2} + (a - b)^2 \Leftrightarrow c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 \\ &\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2, \end{aligned}$$

fica demonstrado o Teorema de Pitágoras.

2.2.2. Prova de James A. Garfield

James Abram Garfield, general, que foi eleito como vigésimo presidente dos Estados Unidos em 1881 e que gostava de Matemática, apresentou uma prova para o Teorema de Pitágoras, usando um trapézio retângulo.

Considerando, para o efeito, quatro triângulos retângulos congruentes, cujas medidas dos catetos são a e b , e medida da hipotenusa é c , construímos um quadrado de lado $a + b$, formado por esses quatro triângulos retângulos e um quadrado central de lado c . A diagonal desse quadrado central divide o quadrado maior em dois trapézios congruentes, cujas medidas das bases maior e menor são, respetivamente, b e a .

Cada trapézio é, assim, composto por um triângulo retângulo T_G , e dois triângulos retângulos congruentes mais pequenos, T_p .

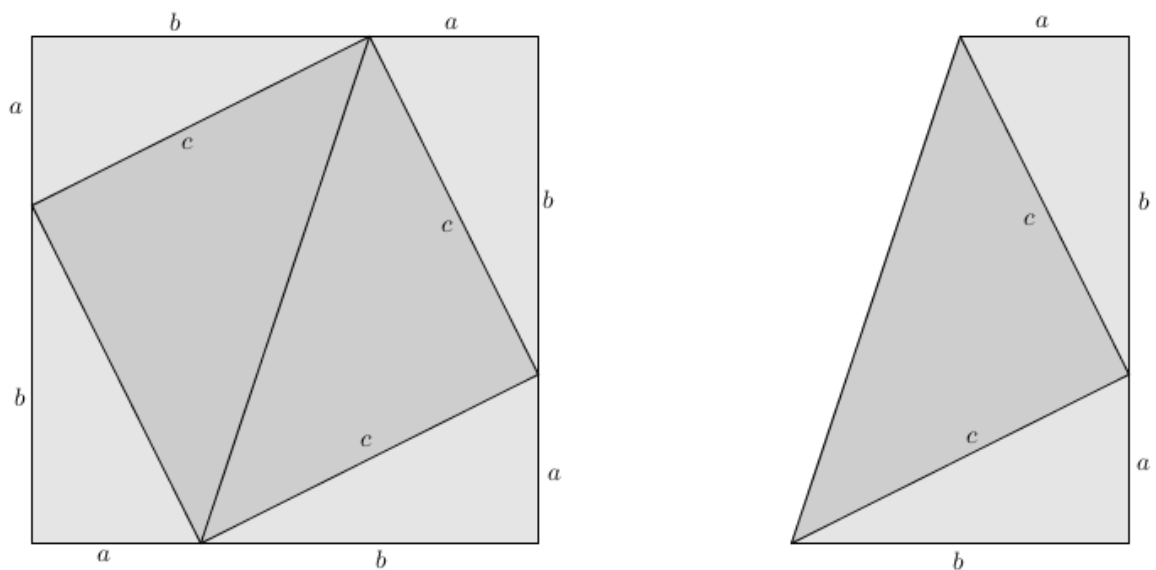


Figura 141. Prova de James A. Garfield

Assim, é evidente que

$$A_{\text{Trapézio}} = A_{T_G} + 2 \times A_{T_p}.$$

Atendendo à fórmula para a área de um trapézio, apresentada na Proposição 34, tem-se

$$\frac{b+a}{2} \times (a+b) = \frac{c^2}{2} + 2 \times \frac{ab}{2}$$

Após simplificar a igualdade anterior,

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab,$$

obtém-se $a^2 + b^2 = c^2$.

2.2.3. Prova do “quadrado chinês”

A prova do “quadrado chinês” baseia-se na decomposição de dois quadrados congruentes, Q_1 e Q_2 , de lados de comprimento $a + b$, em quatro triângulos retângulos congruentes, de catetos a , b e hipotenusa c , e adicionalmente, no caso de Q_1 , em dois quadrados Q_a, Q_b de comprimentos dos lados a , b , respectivamente; no caso de Q_2 , em apenas mais um quadrado Q_c de comprimento do lado c .

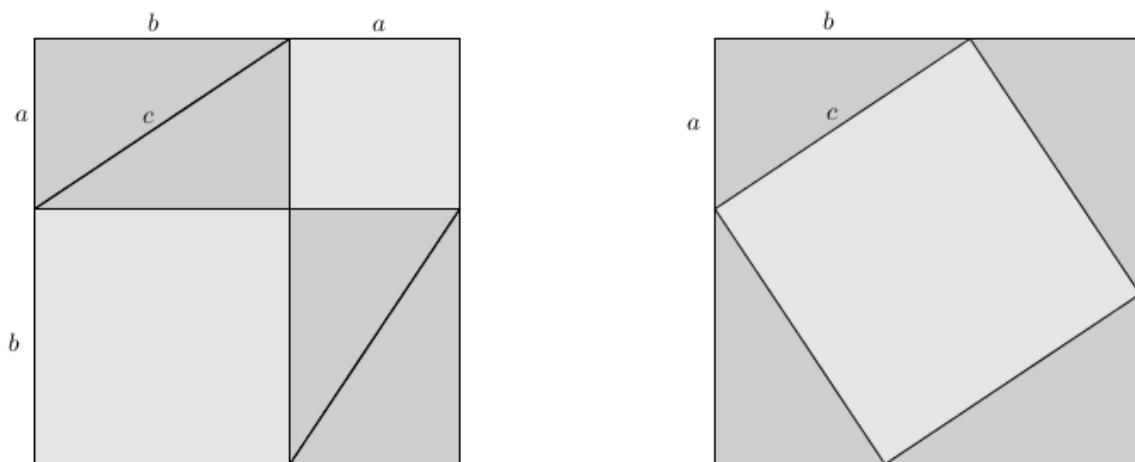


Figura 142. Prova do quadrado chinês

A partir da figura, as áreas dos quadrados Q_1 e Q_2 decompõem-se nas duas formas seguintes:

$$A_{Q_1} = 4 \times A_{\text{Triângulo}} + A_{Q_a} + A_{Q_b} = 4 \times \frac{ab}{2} + a^2 + b^2$$

e

$$A_{Q_2} = 4 \times A_{\text{Triângulo}} + A_{Q_c} = 4 \times \frac{ab}{2} + c^2.$$

Como Q_1 e Q_2 são congruentes,

$$A_{Q_1} = A_{Q_2}$$

e de imediato se destaca a igualdade

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

2.2.4. Prova de Henry Dudeney

Henry Ernest Dudeney (1857–1930), escritor Inglês e matemático que se especializou em quebra-cabeças lógicos e jogos matemáticos, publicou em 1917 uma prova que recupera o enunciado original do Teorema de Pitágoras. Começou por dividir um quadrado, construído sobre um dos catetos do triângulo retângulo, em quatro figuras congruentes. Esses quatro quadriláteros podem ser concertados de modo a formar um quadrado de maior área, contendo no seu interior um quadrado congruente ao construído sobre o outro cateto do triângulo retângulo. Esta interessante forma de decompor um quadrado constitui uma bela prova do Teorema de Pitágoras.

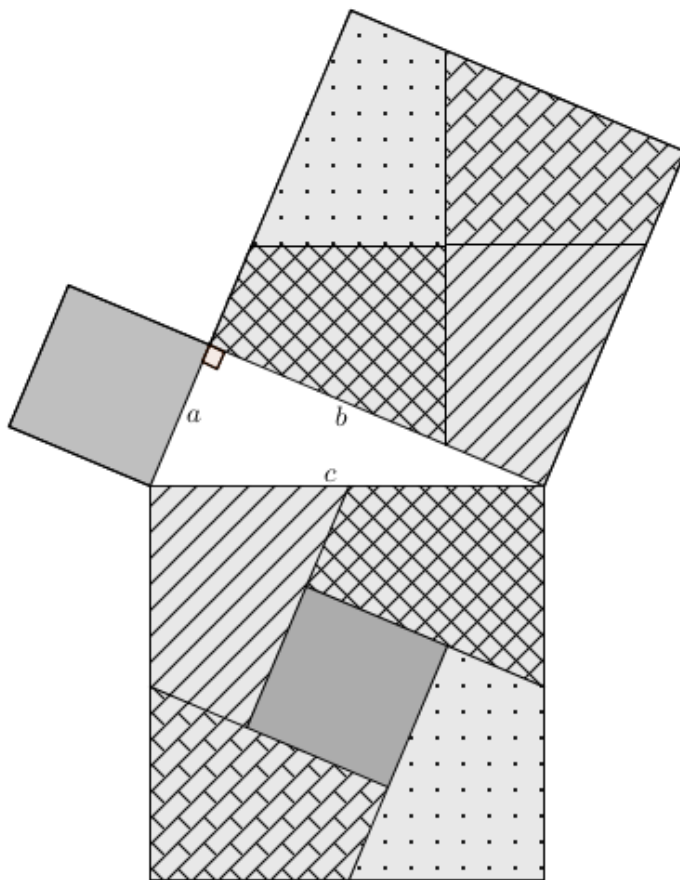


Figura 143. Prova de Henry Dudeney

Por observação da figura, as áreas dos quadrados Q_a , Q_b , Q_c de medida dos lados a , b , c , respectivamente, satisfazem

$$A_{Q_c} = A_{Q_a} + A_{Q_b},$$

isto é,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

2.2.5. Prova de Pappus

Pappus de Alexandria (290–350 d.C.) terá nascido em Alexandria, no Egito, e é um dos matemáticos gregos mais importantes da antiguidade, conhecido pelo seu trabalho *Synagoge*, um compêndio de Matemática que abrange uma ampla gama de tópicos, incluindo Geometria, matemática recreativa, duplicação do cubo, polígonos e poliedros. A demonstração por ele apresentada recupera, também, o enunciado original do Teorema de Pitágoras:

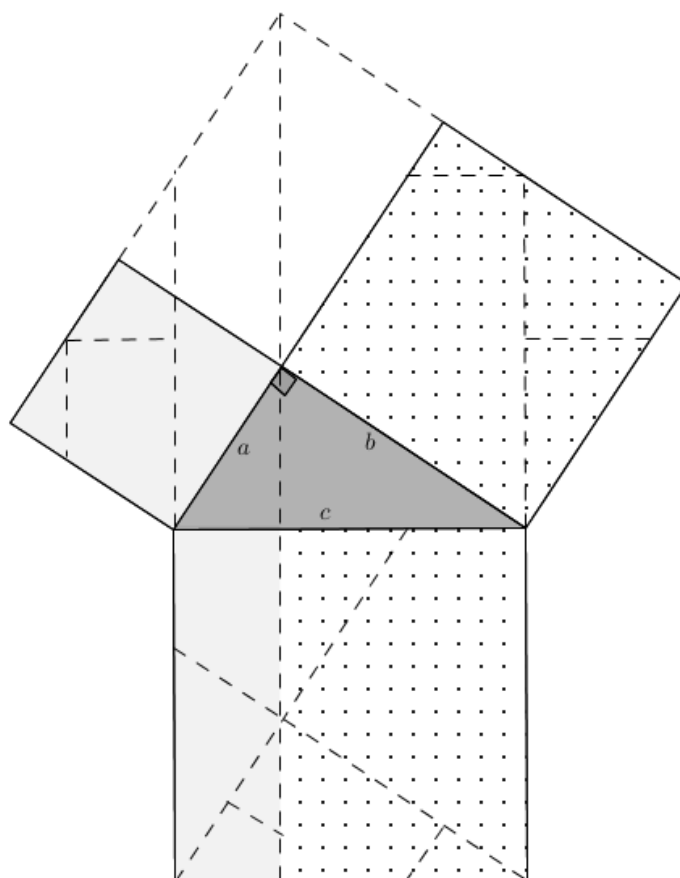


Figura 144. Prova de Pappus

Como no caso anterior, por observação da figura, verificamos que

$$c^2 = A_{Q_c} = A_{Q_a} + A_{Q_b} = a^2 + b^2,$$

denotando de novo por Q_a , Q_b , Q_c os quadrados de medidas dos lados a , b , c , respectivamente,

2.2.6. Prova de Michael Hardy

Pouco se conhece de Michael Hardy. É sabido que terá pertencido à Universidade de Toledo, Ohio.

Hardy baseou a sua prova na semelhança de triângulos, construindo triângulos retângulos inscritos uma circunferência; num desses triângulos, um dos vértices é o centro da circunferência e a hipotenusa é o raio da mesma circunferência.

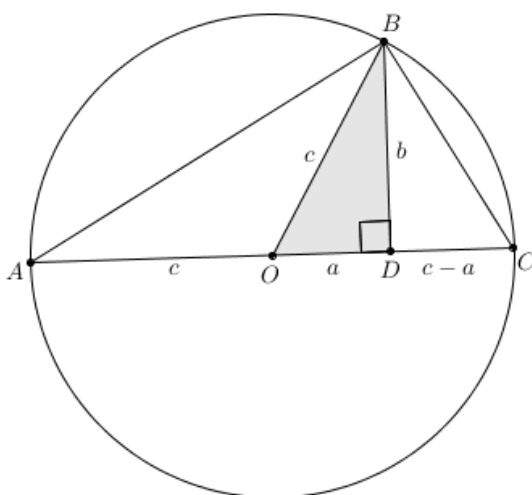


Figura 145. Prova de Michael Hardy

Pela Proposição 15,

$$[ABC] \cong [ABD] \cong [BCD],$$

donde

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}.$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{c+a}{b} &= \frac{b}{c-a} \Leftrightarrow (c+a)(c-a) = b^2 \\ &\Leftrightarrow c^2 - a^2 = b^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

2.2.7. Prova de Leonardo Da Vinci

Leonardo Da Vinci (1452–1519), detentor de grande conhecimento e uma das figuras mais importantes do Alto Renascimento, foi considerado um dos grandes génios da humanidade, tendo-se destacado como cientista, matemático, engenheiro, inventor, anatomista, arquiteto, botânico, poeta, músico, pintor e escultor. O criador do famoso quadro *Mona Lisa*, também quis exibir uma demonstração para o Teorema de Pitágoras.

Da Vinci apresentou a sua demonstração por comparação de áreas, apoiada na figura seguinte composta por quatro quadriláteros congruentes.

$$[ABCD] \cong [ADEF] \cong [GEJI] \cong [GFHI].$$

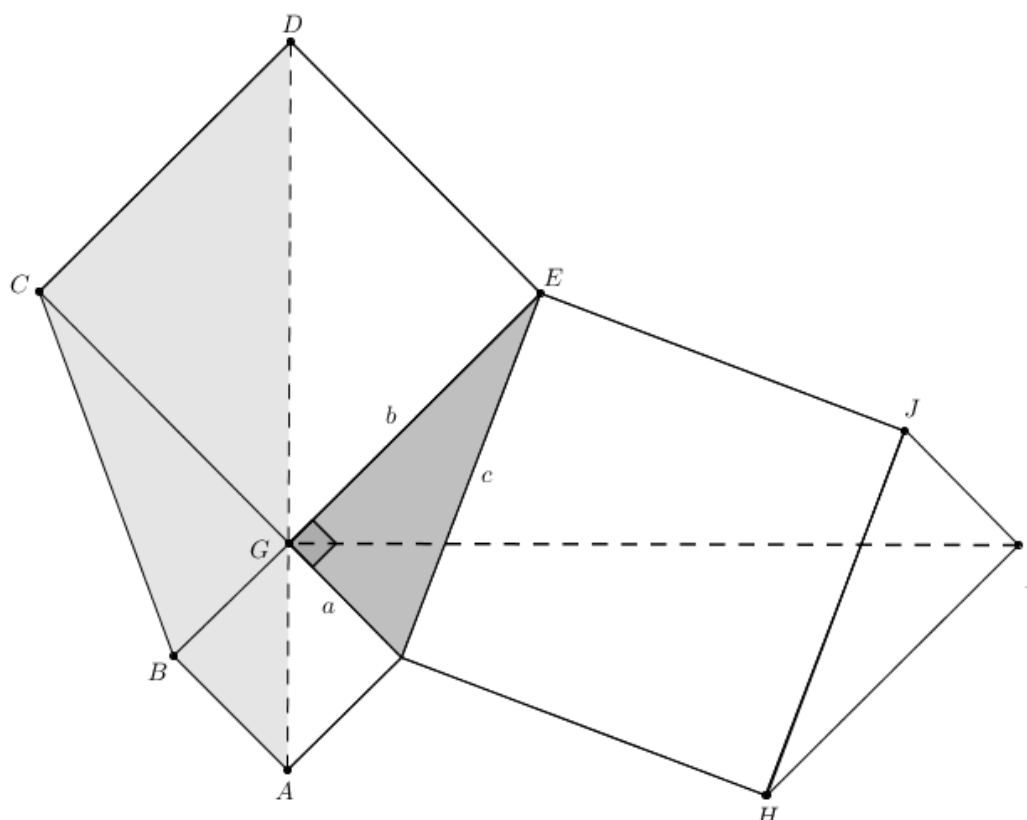


Figura 146. Prova de Leonardo Da Vinci

Logo, vale a igualdade entre as áreas:

$$A_{[ABCDEF]} = A_{[EGFHIJ]}$$

e, atendendo à decomposição de cada um dos polígonos,

$$A_{[ABGF]} + A_{[CDEG]} + A_{[CBG]} + A_{[GEF]} = A_{[FEJH]} + A_{[GEF]} + A_{[JIH]}.$$

Mas, uma vez que

$$[CBG] \cong [GEF] \cong [JIH],$$

podemos simplificar a anterior igualdade entre áreas,

$$A_{[ABGF]} + A_{[CDEG]} = A_{[FEJH]},$$

ou seja,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

2.2.8. “Antiga Demonstração Grega”

Nesta prova, considera-se o caso particular de um triângulo retângulo isósceles ($a = b$), usando apenas triângulos isósceles congruentes e comparando áreas .

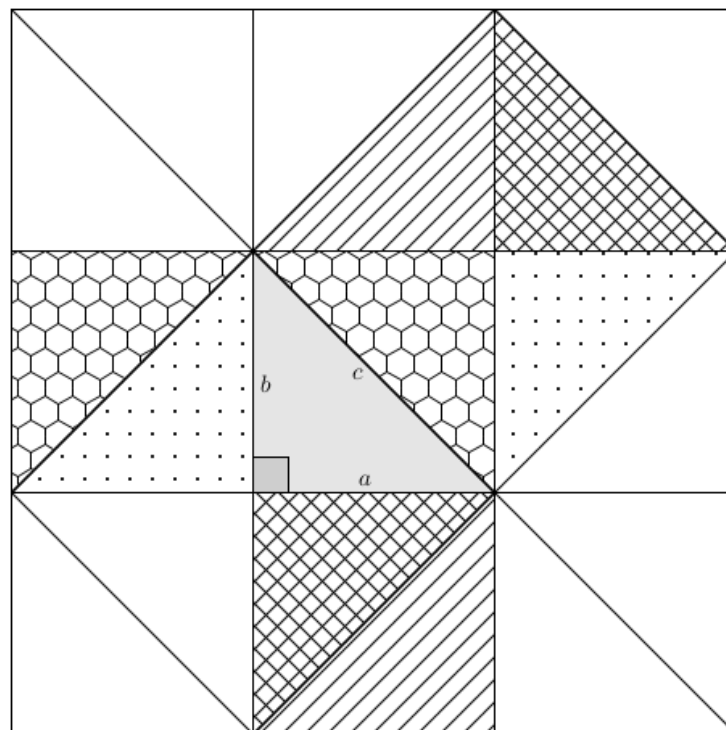


Figura 147. Antiga demonstração grega

Por observação da figura, verificamos imediatamente que

$$c^2 = A_{Q_c} = A_{Q_a} + A_{Q_b} = a^2 + b^2.$$

2.2.9. Prova de Euclides.

Euclides enuncia e demonstra o Teorema de Pitágoras no seu livro “Os Elementos”.

A demonstração, a seguir exibida, embora um pouco mais difícil de se verificar visualmente do que as anteriormente apresentadas, é conhecida como a “Cadeira da Noiva”, por lembrar a cadeira em que as noivas orientais eram transportadas, nas costas de um escravo, para o casamento.

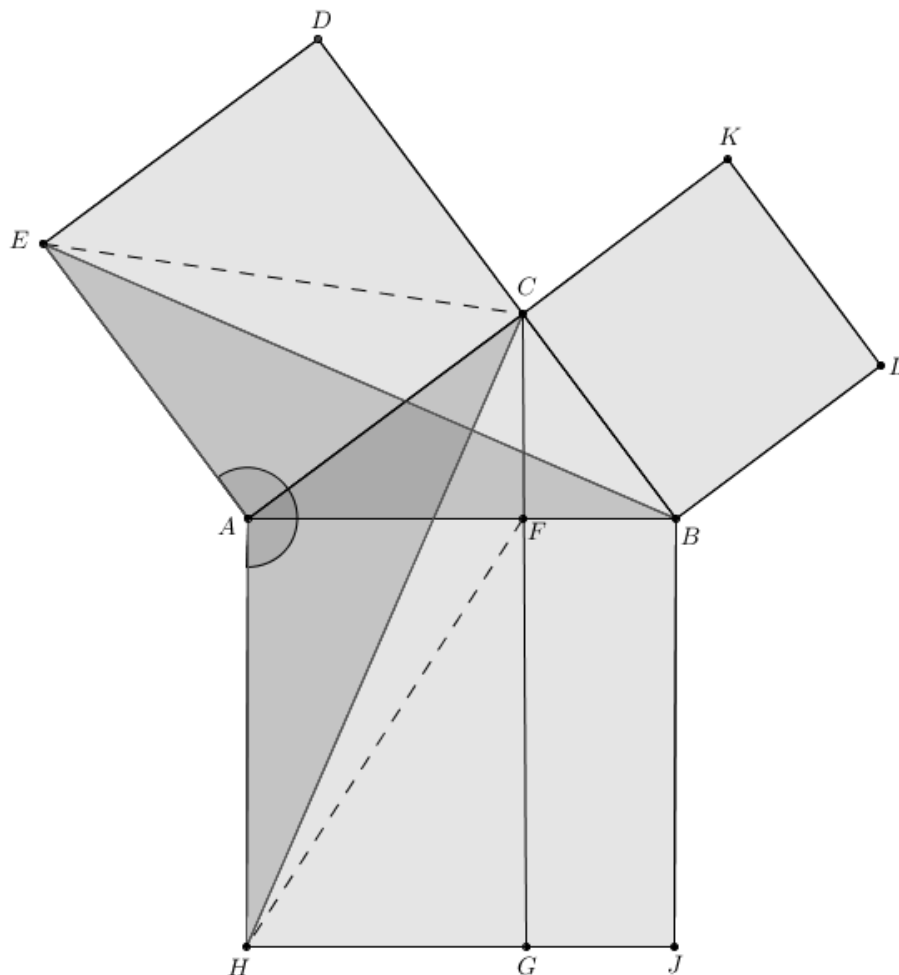


Figura 148. Prova de Euclides: “a Cadeira da Noiva”

Sobre cada um dos lados do triângulo retângulo $[ABC]$, construímos um quadrado de lado coincidente com o respetivo lado do triângulo.

De seguida, traçamos a reta perpendicular à hipotenusa, passando por C , definindo-se os pontos F e G , como sendo a interseção, respetivamente, de $[AB]$ e $[HJ]$ com a reta referida.

Unindo E a B e H a C , obtemos os ângulos congruentes BAE e CAH . Os triângulos $[ABE]$ e $[ACH]$ são congruentes, pelo critério de congruência LAL , Axioma 12. Ora

$$A([ABE]) = \frac{1}{2} \times A([EACD]),$$

dado que possuem a mesma base e a mesma altura. Analogamente,

$$A([ACH]) = \frac{1}{2} \times A([AHGF]).$$

Como $A([ABE]) = A([ACH])$, então

$$A([EACD]) = A([AHGF]).$$

Do mesmo modo se prova que

$$A([BCKL]) = A([BFGJ]).$$

Consequentemente,

$$A([EACD]) + A([BCKL]) = A([AHJB]),$$

o que estabelece o Teorema de Pitágoras.

2.2.10. Prova de George Pólya

George Pólya nasceu em 13 de dezembro de 1887 em Budapeste (Hungria). Estudou Direito, Línguas e Literatura, interessou-se por Latim, Física, Filosofia e Matemática, tendo concluído o seu doutoramento, nesta última, em 1912.

A sua demonstração baseia-se na semelhança de figuras.

Sejam A , B , C as áreas de figuras semelhantes construídas sobre os lados de comprimento a , b , c , respetivamente, de um triângulo retângulo, em que a , b são as medidas dos catetos e c é a da hipotenusa.

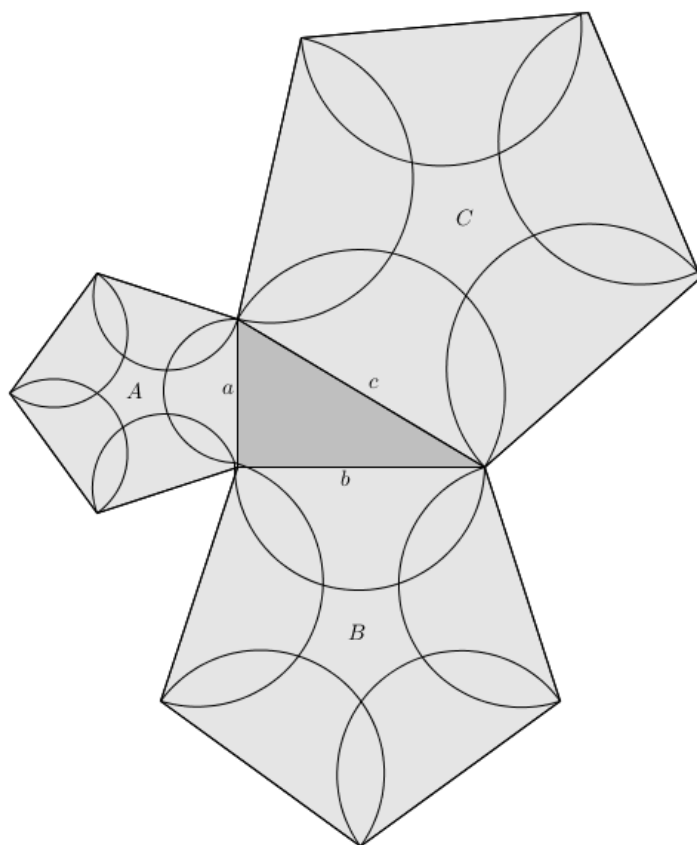


Figura 149. Prova de George Pólya

Vamos verificar que $A + B = C$ e nesta relação assenta a prova de Pólya do Teorema de Pitágoras.

Representemos o triângulo retângulo por Δ_c . Pela Proposição 15, a altura do triângulo Δ_c divide-o em dois triângulos retângulos Δ_a e Δ_b , com hipotenusas de medidas a e b , a ele semelhantes. Consideremos dois triângulos congruentes a Δ_a e Δ_b , construídos sobre os catetos do triângulo Δ_c , e um triângulo congruente a Δ_c , construído sobre a sua hipotenusa. É claro que as áreas A' , B' , C' , respetivamente, dos triângulos Δ_a , Δ_b , Δ_c satisfazem

$$A' + B' = C'.$$

Vamos provar uma relação análoga para as áreas A , B , C de quaisquer outras figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo original.

Sejam r_1 e r_2 as razões de semelhança que transformam as figuras de áreas A e B , respetivamente, na de área C . Pela Proposição 18, valem as seguintes relações entre as áreas:

$$C = r_1^2 A \quad \text{e} \quad C = r_2^2 B,$$

assim como

$$C' = r_1^2 A' \quad \text{e} \quad C' = r_2^2 B'.$$

Da razão entre as áreas das figuras semelhantes, obtém-se

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'},$$

o que implica que

$$\frac{A + B}{A' + B'} = \frac{C}{C'}.$$

Da igualdade entre os dois denominadores anteriores, de imediato resulta

$$A + B = C.$$

Uma vez que $r_1^2 A = r_2^2 B = C$ e como as razões de semelhança são dadas por

$$r_1 = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{c}{b},$$

então

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}.$$

Como consequência

$$\frac{A + B}{a^2 + b^2} = \frac{C}{c^2}$$

e a igualdade entre os anteriores numeradores implica o Teorema de Pitágoras,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

2.2.11. Demonstração com o Tangram

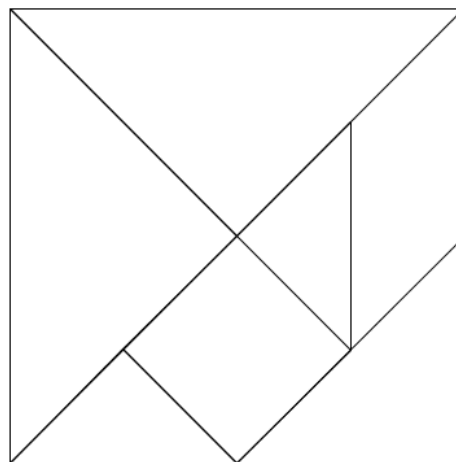


Figura 150. Quadrado formado pelas sete peças do Tangram

A demonstração a seguir apresentada recupera o enunciado original do Teorema de Pitágoras, para o caso particular de um triângulo retângulo isósceles, utilizando dois exemplares do fascinante e didático jogo Tangram chinês.

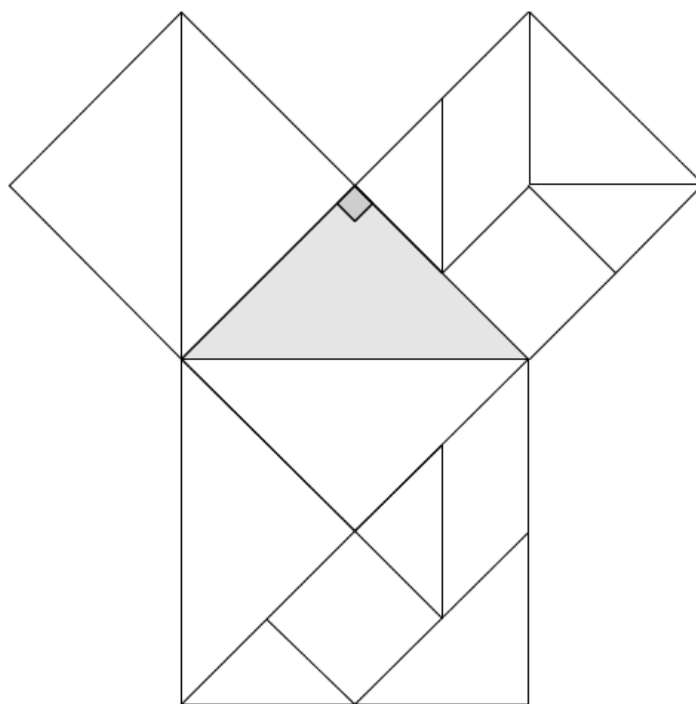


Figura 151. Prova usando o Tangram

2.3. Aplicações do Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras além de ser uma importante ferramenta utilizada na Matemática, principalmente na área da Geometria, tem também inúmeras aplicações nas diversas áreas de atuação do homem.

Tomemos como exemplo a seguinte situação:

“Uma escada, apoiada até ao cimo de uma parede, dista 4 metros da mesma. Sabendo que a escada mede 5 metros, qual é a altura da parede?”

Usando o Teorema de Pitágoras, facilmente chegaríamos à resposta para a nossa questão. Bastava, para isso idealizar um triângulo retângulo de base 4 e hipotenusa 5.

2.3.1. Áreas de semicírculos sobre os lados de um triângulo retângulo

Proposição 64.

Dado um triângulo retângulo de medidas dos catetos a , b e da hipotenusa c , a soma das áreas dos semicírculos sobre os catetos é igual à área do semicírculo sobre a hipotenusa.

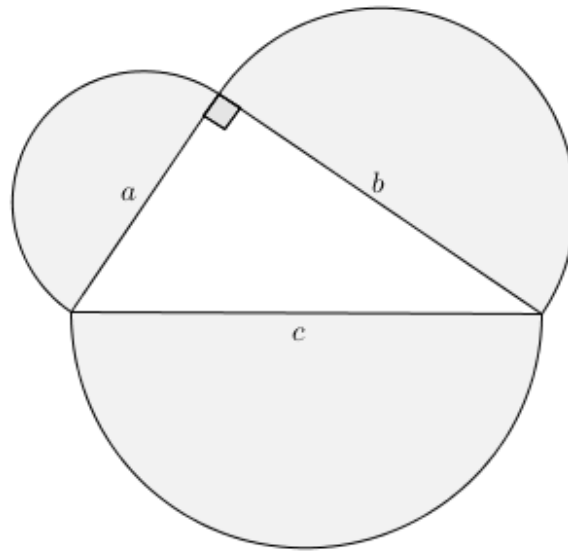


Figura 152. Semicírculos sobre os catetos e hipotenusa de um triângulo retângulo

Prova. Como os semicírculos C_a, C_b, C_c , contruídos sobre os catetos do triângulo retângulo, têm diâmetros a, b, c , as suas áreas são dadas por

$$A_{C_a} = \frac{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}, \quad A_{C_b} = \frac{\pi \left(\frac{b}{2}\right)^2}{2}, \quad A_{C_c} = \frac{\pi \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2},$$

respetivamente. Efetuemos, a soma das áreas dos dois semicírculos menores:

$$A_{C_a} + A_{C_b} = \frac{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi \left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \frac{a^2 + b^2}{2^2}}{2}.$$

Usando a igualdade $a^2 + b^2 = c^2$, verificada pelo Teorema de Pitágoras, segue-se

$$A_{C_a} + A_{C_b} = \frac{\pi \frac{c^2}{2^2}}{2} = \frac{\pi \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} = A_{C_c},$$

como pretendido. ■

2.3.2. As lúnulas de Hipócrates

“A palavra lúnula tem a sua origem no termo latim *lanuar* - com forma de lua. As lúnulas são regiões planas delimitadas por arcos de diferentes circunferências. Hipócrates de Quios (460 a.C. - 380 a.C.) realizou um estudo exaustivo das lúnulas. Descobriu e demonstrou que

A soma das áreas das lúnulas construídas a partir de dois lados de um triângulo retângulo, de forma que os centros dos respectivos arcos sejam os pontos médios dos lados do triângulo, é igual à área do triângulo.”

*In Matemática Dinâmica
Matemática 8.º ano*

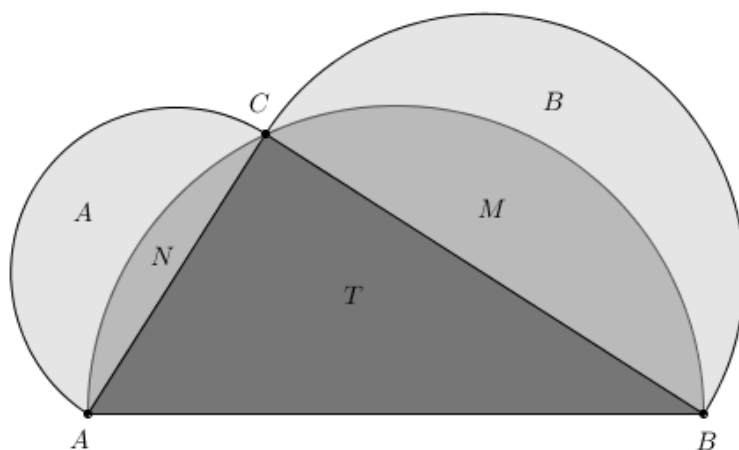


Figura 153. Lúnulas de Hipócrates

Prova. Consideremos um triângulo retângulo $[ABC]$, inscrito num semicírculo de diâmetro $[AB]$. Consideremos, ainda, dois semicírculos de diâmetros $[AC]$ e $[CB]$. Designando por T a área do triângulo retângulo, por A, B a área das lúnulas e por N, M as áreas das regiões compreendidas entre as lúnulas e os catetos do triângulo, iremos provar que $T = A + B$.

Aplicando a Proposição 65, verifica-se que a área do semicírculo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos semicírculos construídos sobre os catetos, ou seja,

$$T + N + M = (A + N) + (B + M),$$

donde $T = A + B$. Assim, a área do triângulo é igual à soma das áreas das lúnulas.

2.3.3. Áreas de figuras semelhantes sobre os lados de um triângulo retângulo

A Proposição 64 apresentado na subseção 2.3.1. pode ser generalizada para quaisquer figuras geométricas construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, desde que elas sejam semelhantes entre si.

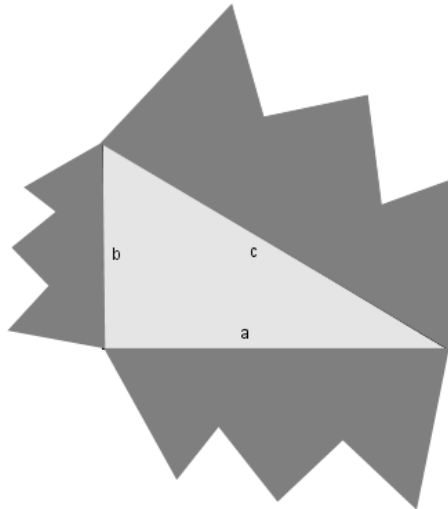


Figura 154. Figuras semelhantes sobre os catetos e hipotenusa de um triângulo retângulo

Proposição 65.

Dado um triângulo retângulo de catetos a , b e hipotenusa c , sejam A , B , C as áreas de figuras semelhantes construídas, respectivamente, sobre os lados a , b , c .

Então $C = A + B$.

Prova. Sejam A , B e C as áreas dessas figuras semelhantes construídas sobre os lados a , b e c , respectivamente. Provemos que $C = A + B$.

Resulta da Proposição 18 que a razão entre áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Assim,

$$\frac{C}{A} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \quad e \quad \frac{C}{B} = \left(\frac{c}{b}\right)^2.$$

Portanto,

$$\frac{C}{c^2} = \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}.$$

Da seguinte propriedade das proporções

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{A + B}{a^2 + b^2},$$

obtemos

$$\frac{C}{c^2} = \frac{A + B}{a^2 + b^2}.$$

Como, pelo Teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$, concluímos que $C = A + B$. ■

2.3.4. Números irracionais e Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras e os números irracionais relacionam-se no cálculo da medida da diagonal de um quadrado.

Dado um quadrado $[ABCD]$ de lado 1 unidade, vamos determinar o comprimento da sua diagonal.

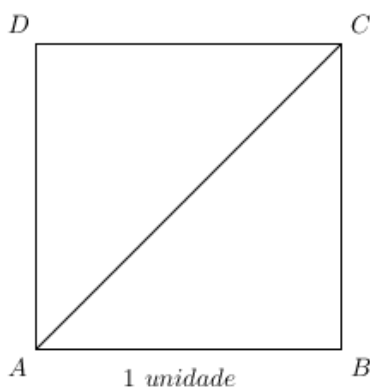


Figura 155. Diagonal num quadrado de lado 1 unidade

A diagonal divide o quadrado em dois triângulos retângulos, sendo a hipotenusa comum aos referidos triângulos. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{2}.$$

A medida da diagonal do quadrado é o número irracional $\sqrt{2}$.

2.3.5. Extração geométrica da raiz quadrada do produto de dois números

Sejam a e b dois números positivos. A partir de uma circunferência de diâmetro $a + b$, podemos interpretar geometricamente a raiz quadrada do produto ab .

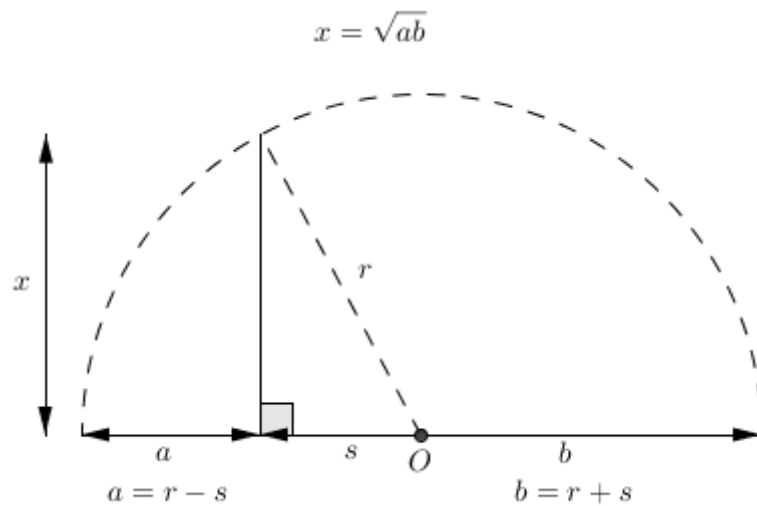


Figura 156. Extração geométrica da raiz quadrada do produto de dois números

Por observação da figura e pelo Teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + s^2 \Leftrightarrow x^2 = r^2 - s^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = (r - s)^2(r + s)^2. \end{aligned}$$

Mas

$$a = r - s \quad \text{e} \quad b = r + s,$$

donde $x^2 = ab$ e, sendo $x > 0$, tem-se que $x = \sqrt{ab}$.

2.3.6. Fórmula geradora de ternos pitagóricos

Definição. Sendo a, b, c números inteiros positivos, com $a < b < c$, diz-se que (a, b, c) é um *terno pitagórico* se $c^2 = a^2 + b^2$.

Um *terno pitagórico primitivo* é um terno pitagórico (a, b, c) em que o maior divisor comum a a e a b é 1, e, por conseguinte, o maior divisor comum a a , b e c é 1.

Se um terno pitagórico não é primitivo, então ele é um múltiplo de um terno pitagórico primitivo

Curiosamente, um pedreiro utiliza, geralmente, um terno pitagórico, múltiplo de um terno primitivo, para a construção de paredes em esquadria, ou seja, paredes que

formam um ângulo reto. O método utilizado por estes profissionais na área de construção consiste em fazer, no chão, alinhamentos com fios de nylon presos a estacas de madeira. Num dos lados do alinhamento é marcado 60 cm do ponto de encontro com o outro alinhamento e, no outro lado, é marcado 80 cm do mesmo ponto de encontro. Depois é medida, com uma corda, a distância entre os extremos dos lados de comprimentos 60 cm e 80 cm, que deverá ser igual a 100 cm. Assim é obtido o ângulo reto na construção de uma casa. É claro que $(60, 80, 100)$ é um terno pitagórico múltiplo do mais famoso terno pitagórico primitivo $(3, 4, 5)$.

A fórmula geradora de ternos pitagóricos que a seguir apresentamos é atribuída a Platão (séc. IV a.C.), filósofo e matemático do período clássico da Grécia Antiga e fundador da Academia em Atenas, a primeira instituição de educação superior do mundo ocidental.

Sejam m e n inteiros positivos, tais que $m > n$. Vamos verificar que (a, b, c) é um terno pitagórico, quando

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn \quad \text{e} \quad c = m^2 + n^2.$$

Começemos por calcular a soma dos quadrados de a e de b . Assim,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\ &= (m^2 + n^2)^2 = c^2. \end{aligned}$$

Para qualquer escolha de números inteiros m e n , (a, b, c) é um terno pitagórico.

2.3.7. Distância entre dois pontos do plano ou do espaço

Definição. Um *referencial cartesiano do plano* é formado por duas retas orientadas, concorrentes num ponto chamado *origem*. Sendo os eixos perpendiculares o referencial diz-se *ortogonal*. Se a unidade de comprimento for igual nos dois eixos, o referencial diz-se *monométrico*.

A cada ponto P do plano corresponde um par ordenado (a, b) de números reais, sendo a a *abscissa* e b a *ordenada*.

Consideremos um referencial cartesiano do plano e três pontos, A , B e C , nele marcados. Calculemos a distância d entre A e B .

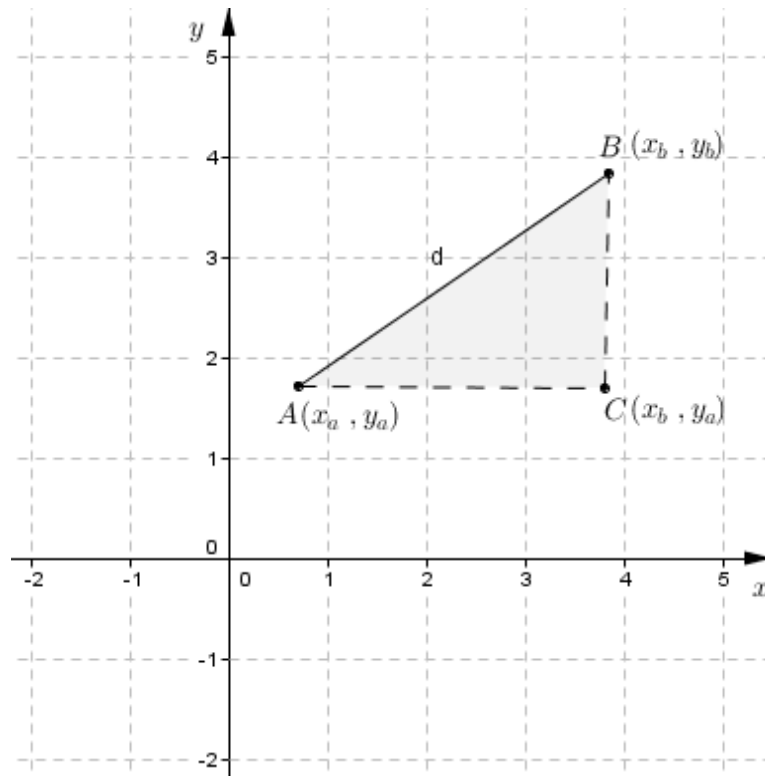


Figura 157. Distância entre dois pontos do plano

A distância entre os pontos A e C e entre os pontos B e C , apresentados na figura, é dada por

$$\overline{AC} = |x_b - x_a| \quad \text{e} \quad \overline{BC} = |y_b - y_a|,$$

respetivamente. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$d^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,$$

isto é,

$$d^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2.$$

Sendo a distância d um número positivo, então

$$d = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

Podemos, assim, definir distância entre dois pontos do plano.

Definição. Sejam A e B dois pontos no plano, correspondentes aos pares ordenados (x_a, y_a) e (x_b, y_b) . A *distância* entre A e B é dada por

$$d = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

Definição. Um *referencial cartesiano do espaço* é formado por três retas orientadas, concorrentes num ponto chamado *origem*. Sendo os eixos perpendiculares o referencial diz-se *ortogonal*. Se a unidade de comprimento for igual nos três eixos, o referencial diz-se *monométrico*.

A cada ponto P do espaço corresponde um trio ordenado (a, b, c) de números reais, sendo a a *abscissa*, b a *ordenada* e c a *cota*.

Consideremos um referencial cartesiano do espaço e três pontos, A , B e C , nele marcados. Calculemos a distância D entre A e C .

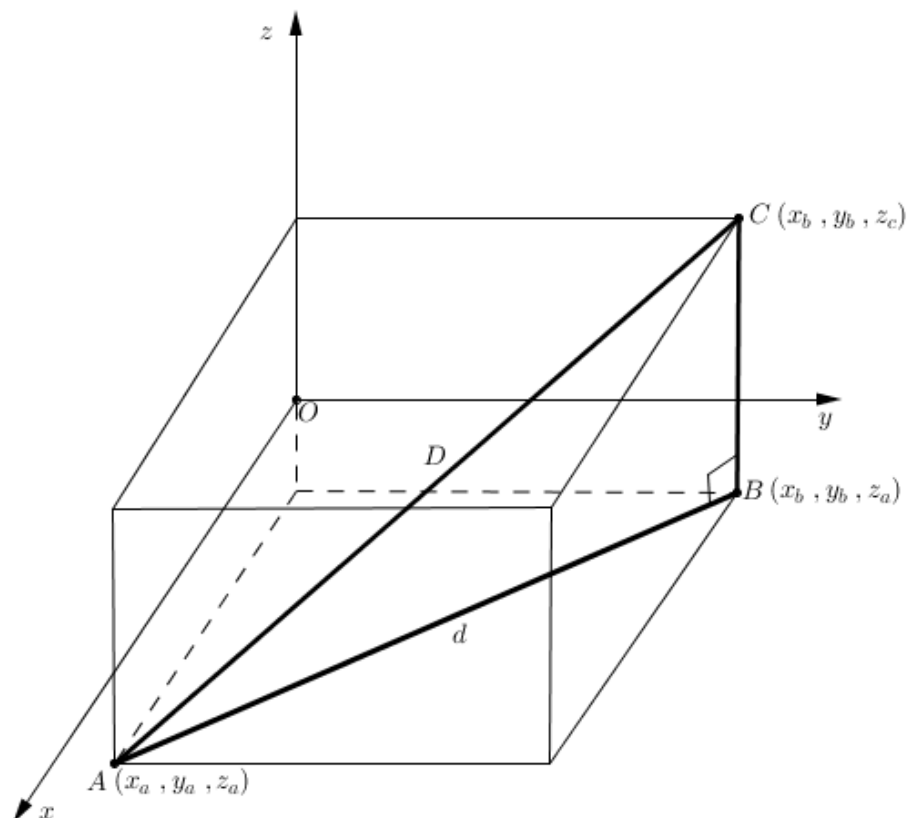


Figura 158. Distância entre dois pontos do espaço

Por observação da figura anterior e considerando a distância entre dois pontos no plano $z = z_a$, obtemos

$$d = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

Temos que

$$\overline{BC} = |z_c - z_a|.$$

Seja $D = \overline{AC}$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$D^2 = d^2 + \overline{BC}^2,$$

donde

$$D^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_c - z_a)^2.$$

Como a distância D é um número positivo, então

$$D = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_c - z_a)^2}.$$

Podemos, assim, definir distância entre dois pontos do espaço.

Definição. Sejam A e B dois pontos no espaço, correspondentes aos trios ordenados (x_a, y_a, z_a) e (x_b, y_b, z_b) . A distância entre A e B é dada por

$$D = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}.$$

RACIOCÍNIOS GEOMÉTRICOS

Estando a Geometria na base da matemática grega, os raciocínios e as demonstrações elaboradas pelos antigos gregos eram essencialmente geométricas.

As questões algébricas eram tratadas geometricamente como se pode verificar, na sua maioria, nas catorze proposições que compõem o Livro II de Euclides.

Ainda hoje o tema "casos notáveis da multiplicação", abordado no 8.º ano de escolaridade, na maioria dos casos, é tratado através de uma associação a conceitos de Geometria, nomeadamente, a decomposição de figuras e posterior cálculo de áreas, possibilitando aos alunos uma visualização e comparação com os conhecimentos obtidos previamente.

Algumas identidades algébricas, envolvendo números reais positivos podem ser esclarecidas através de raciocínios geométricos.

Neste contexto, um número real positivo a é representado por um segmento de reta com a unidades de comprimento. Assim, a soma de duas grandezas a e b é representada por um segmento de reta construído por *justaposição* de dois segmentos, um de comprimento a e outro de comprimento b .

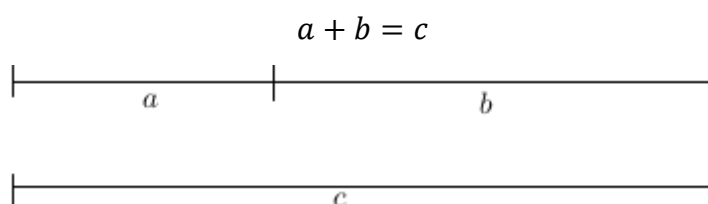


Figura 159. Adição de duas grandezas

Multiplicar duas grandezas a e b é calcular a área, s , de um retângulo cujos lados têm a e b unidades de comprimento.

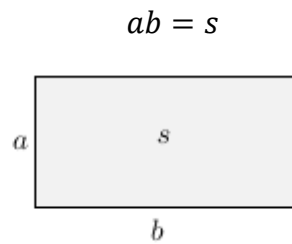


Figura 160. Produto de duas grandezas

3.1. Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

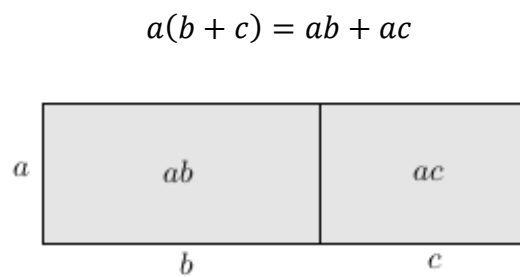


Figura 161. Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

3.2. Produto de dois binômios

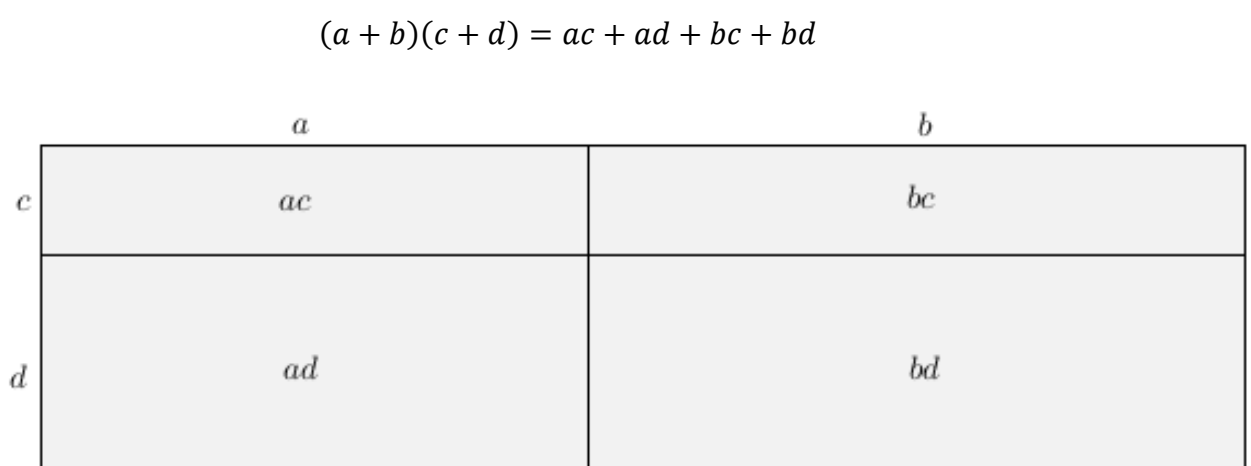


Figura 162. Produto de dois binômios

3.3. Casos notáveis da multiplicação

3.3.1. Quadrado da soma

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

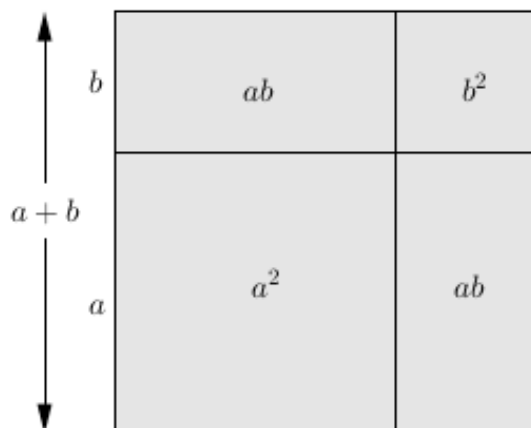


Figura 163. Quadrado da soma

3.3.2. Quadrado da diferença

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

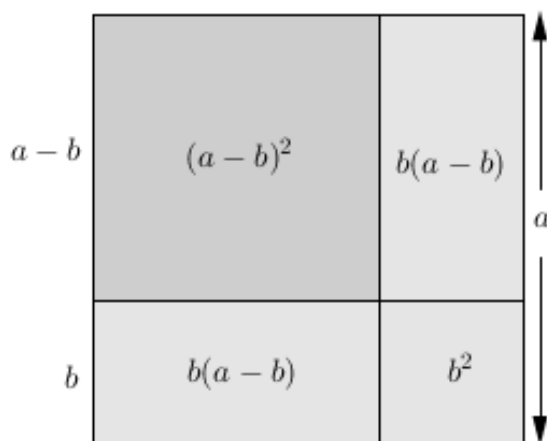


Figura 164. Quadrado da diferença

3.3.3. Diferença de quadrados

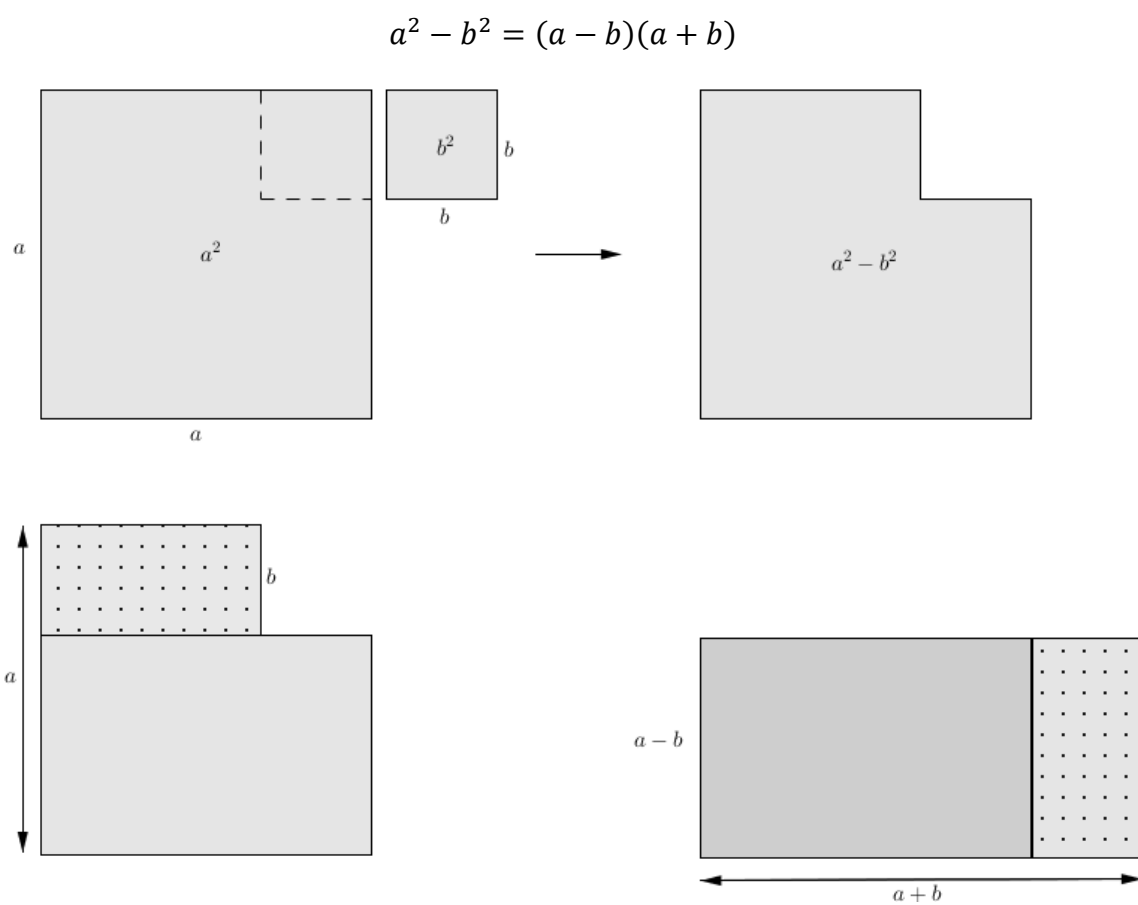


Figura 165. Diferença de quadrados

3.4. Adição do quadrado da soma com o quadrado da diferença

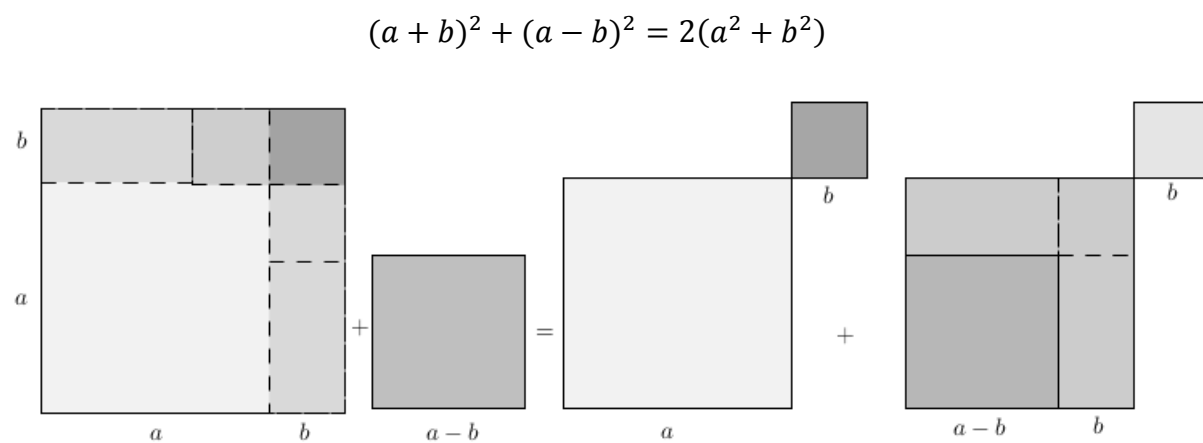


Figura 166. Adição do quadrado da soma com o quadrado da diferença

3.5. Outro caso envolvendo quadrados

$$(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (a - b - c)^2 = (2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2$$

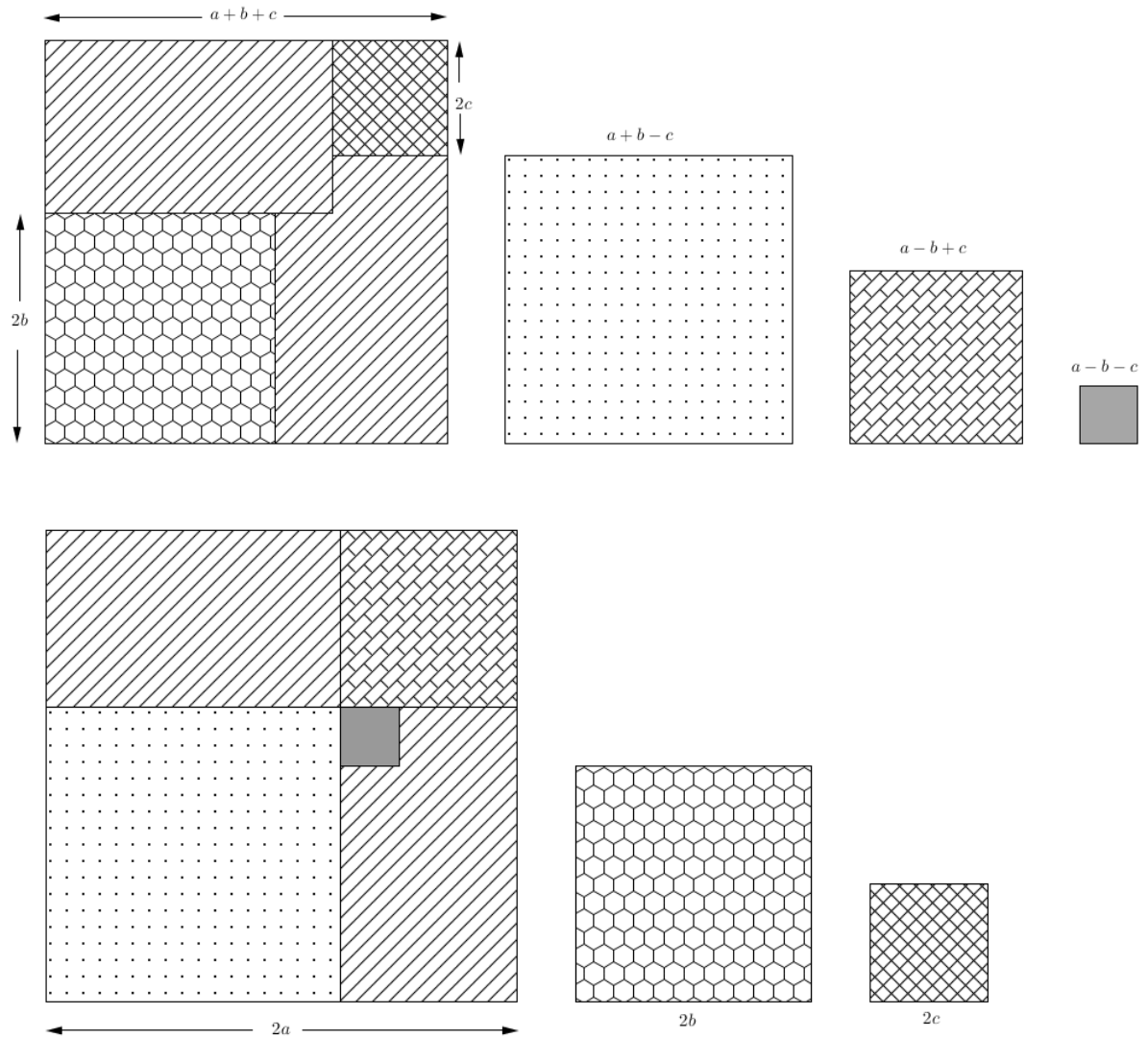


Figura 167. Outro caso envolvendo quadrados

3.6. Cubo da soma e cubo da diferença

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

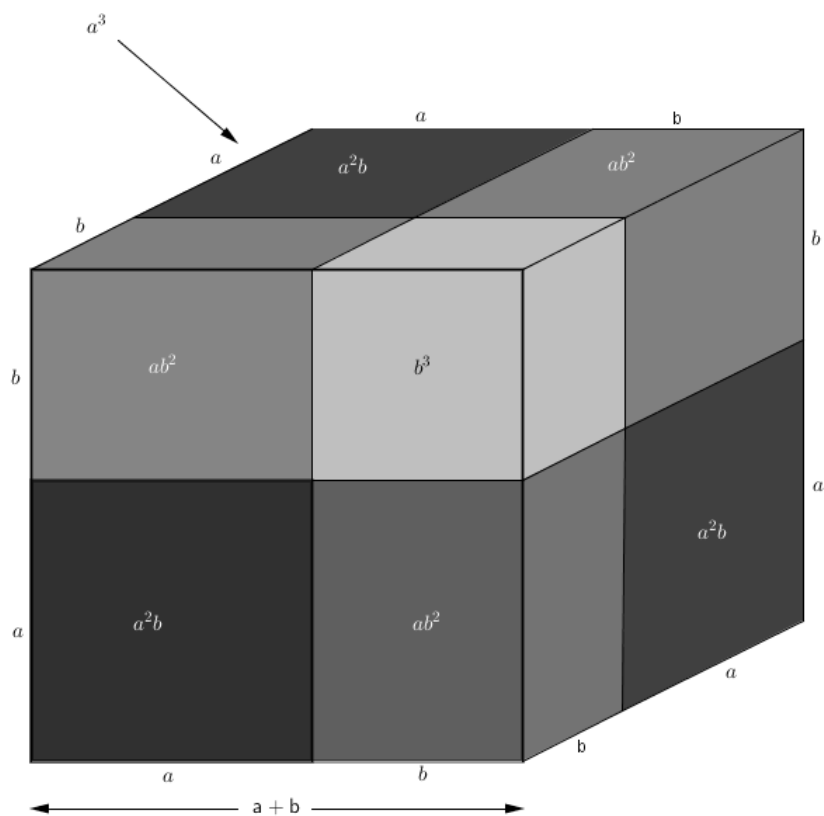


Figura 168. Cubo da soma

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

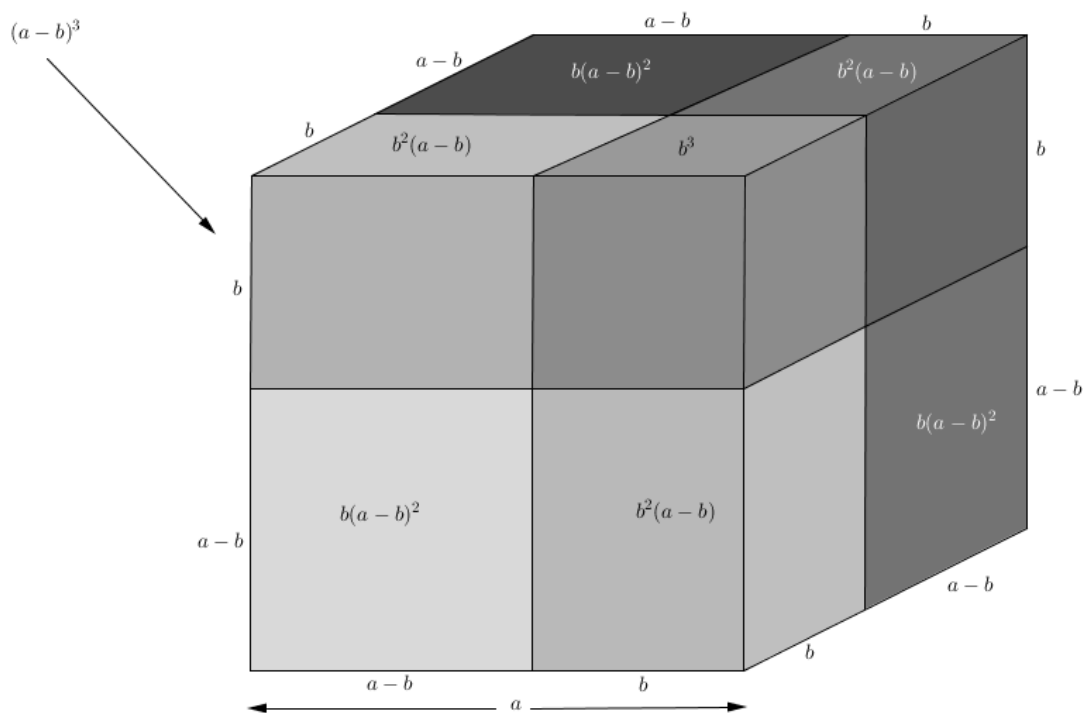


Figura 169. Cubo da diferença

3.7. Regra de Pitágoras para calcular o quadrado de um número inteiro

Pitágoras descobriu uma regra para calcular o quadrado de um número inteiro n , baseando-se na soma dos n primeiros números ímpares:

$$1^2 = 1,$$

$$2^2 = 1 + 3 = 4,$$

$$3^2 = 1 + 3 + 5 = 9,$$

$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16,$$

$$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25,$$

\vdots

$$n^2 = 1 + 3 + \dots + (2n - 1),$$

muito provavelmente, seguindo o raciocínio geométrico da figura seguinte.

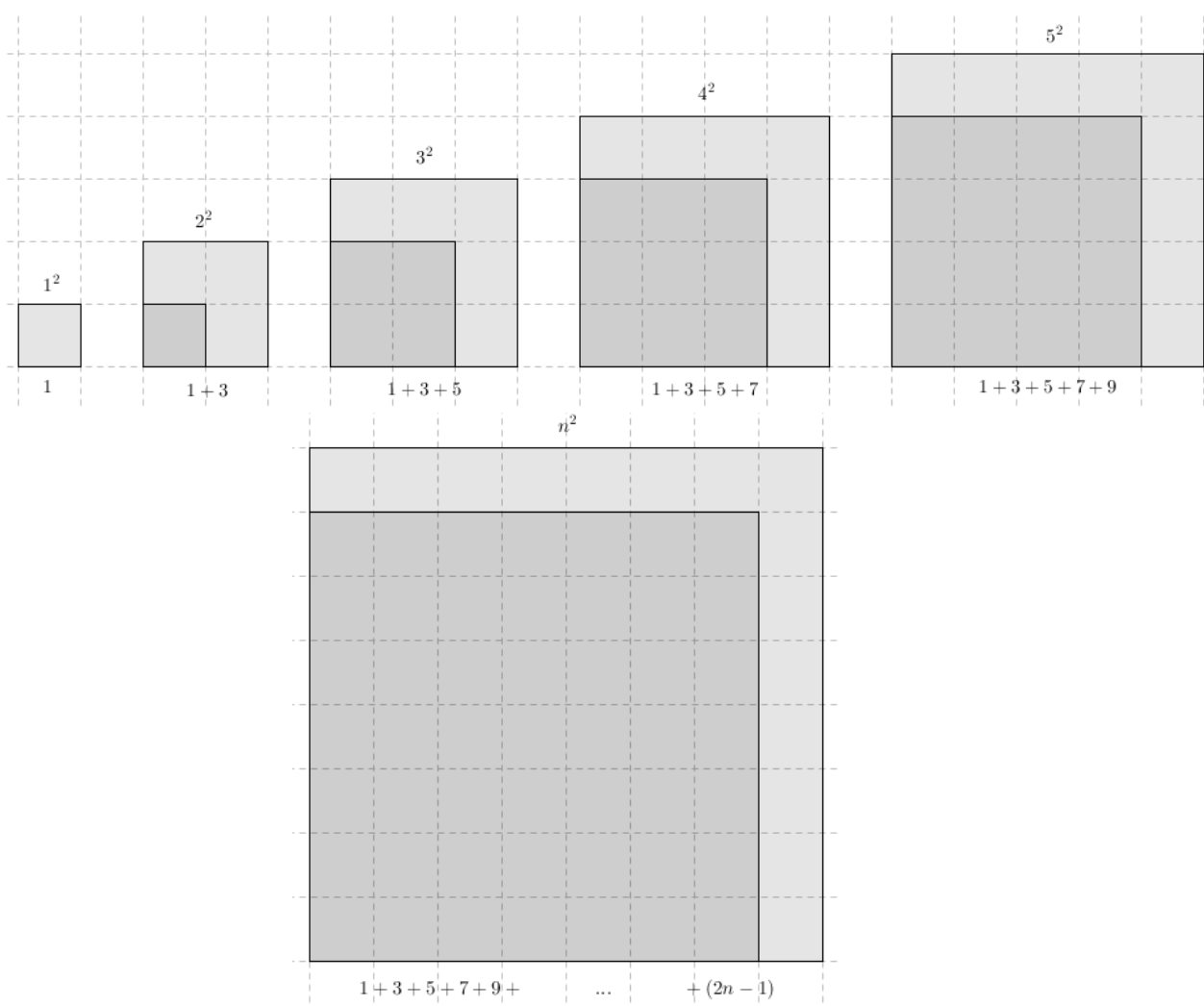


Figura 170. Regra de Pitágoras para calcular o quadrado de um número inteiro

CAPÍTULO 4

DESIGUALDADES

As desigualdades são muito importantes na evolução da Matemática e pensa-se terem surgido quando se sentiu necessidade de ordenar, fazer medições, aproximações, etc.. Ao longo dos tempos surgiram muitos problemas com desigualdades, envolvendo grandes matemáticos, entre eles, como seria de esperar, Euclides.

Se a duas grandezas iguais subtrairmos outras grandezas iguais, resultam duas grandezas iguais, isto é,

$$a = b \quad \text{e} \quad a' = b' \Rightarrow a - a' = b - b'.$$

Se a duas grandezas desiguais adicionarmos outras grandezas desiguais, no mesmo sentido, resultam duas grandezas desiguais no mesmo sentido, isto é,

$$a > b \quad \text{e} \quad a' > b' \Rightarrow a + a' > b + b'.$$

4.1. Desigualdade de segmentos de reta e de triângulos

Para comparar dois segmentos de reta, $[AB]$ e $[CD]$, transportamos um deles, por exemplo $[CD]$, até que a origem C coincida com a origem A e rodamos em torno da origem comum, A , até que os dois pertençam à mesma reta.

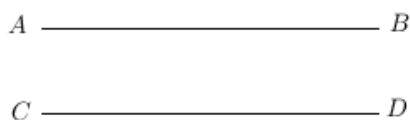


Figura 171. Segmentos de reta $[AB]$ e $[CD]$

Podem dar-se três casos:

- i. Se o extremo D coincidir com o extremo B , os segmentos são congruentes.



Figura 172. Caso i. de (des)igualdade de segmentos de reta

- ii. Se o ponto D cair no prolongamento do segmento $[AB]$, o segmento $[AB]$ tem menor comprimento do que o segmento $[CD]$ e escreve-se $\overline{AB} < \overline{CD}$.

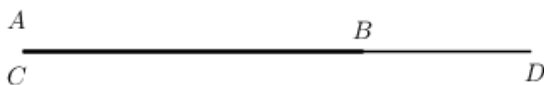


Figura 173. Caso ii. de desigualdade de segmentos de reta

- iii. Se o ponto D cair no interior do segmento $[AB]$, diz-se que o segmento $[AB]$ é maior que o segmento $[CD]$ e escreve-se $\overline{AB} > \overline{CD}$.

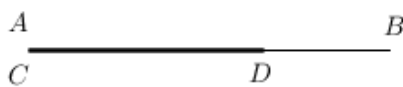


Figura 174. Caso iii. de desigualdade de segmentos de reta

Proposição 66.

Num triângulo, se dois lados não são congruentes, então os ângulos a estes opostos não são congruentes, e ao maior lado opõe-se o ângulo de maior medida.

Prova. Seja $[ABC]$ um triângulo com dois lados não congruentes.

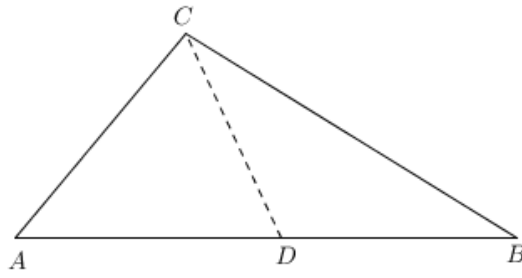


Figura 175. Triângulo de lados não congruentes

Suponhamos que $\overline{AB} > \overline{AC}$.

Aos lados $[AB]$ e $[AC]$ opõem-se, respetivamente, os ângulo ACB e ABC .

Mostremos que estes dois ângulos não são congruentes. Se $\hat{ACB} = \hat{ABC}$, pela Proposição 10, então o triângulo seria isósceles de base $[BC]$, o que contraria a hipótese $\overline{AB} > \overline{AC}$. Portanto, $\hat{ACB} \neq \hat{ABC}$.

Resta mostrar que $\hat{ACB} > \hat{ABC}$. Marquemos um ponto D sobre a semirreta \overrightarrow{AB} , tal que $\overline{AD} = \overline{AC}$. Como

$$\overline{AB} > \overline{AC} = \overline{AD},$$

então, pela Proposição 2, o ponto D está entre A e B . Assim, a semirreta \overrightarrow{CD} divide o ângulo ACB e, por isso, $\hat{ACB} > \hat{ACD}$.

Como $[ACD]$ é um triângulo isósceles de base $[CD]$, pela prova da Proposição 10, os ângulos adjacentes à base são congruentes, isto é, $\hat{ACD} = \hat{ADC}$. Mas, o ângulo ADC é externo ao triângulo $[BCD]$ e não adjacente ao ângulo interno DBC . Pelo Teorema do ângulo externo, tem-se $\hat{ADC} > \hat{DBC}$.

Resumindo, mostrámos que

$$\hat{ACB} > \hat{ACD} = \hat{ADC} > \hat{DBC} = \hat{ABC},$$

como pretendido. ■

Proposição 67

Num triângulo, se dois ângulos não são congruentes, então os lados a estes opostos não são congruentes, e ao ângulo de maior medida opõe-se o maior lado.

Prova. Seja $[ABC]$ um triângulo com dois ângulos não congruentes.

Suponhamos que $\hat{ACB} > \hat{ABC}$.

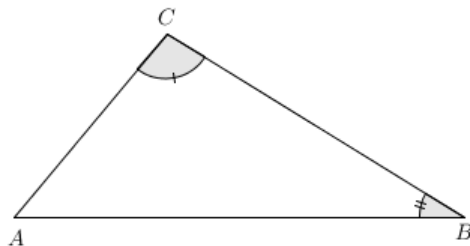


Figura 176. Triângulo de ângulos não congruentes

Ora, $[AB]$ e $[AC]$ são os lados opostos aos ângulos ACB e ABC , respectivamente, Se $\overline{AB} = \overline{AC}$, então $[ABC]$ seria um triângulo isósceles de base $[BC]$ e, pela Proposição 10, ter-se-ia $\hat{A}CB = \hat{A}BC$, contra a hipótese. Se $\overline{AB} < \overline{AC}$, então, pela Proposição 66, ter-se-ia $\hat{A}CB < \hat{A}BC$, o que, de novo, contradiz a hipótese. Então, só pode ocorrer $\overline{AB} > \overline{AC}$. ■

De um modo mais coloquial, as Proposições 66 e 67 afirmam que, num triângulo, ao maior lado opõe-se o *maior* ângulo e vice-versa, ou seja, ao *maior* ângulo opõe-se o maior lado.

Proposição 68. (Desigualdade triangular)

Num triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior do que o comprimento do terceiro lado.

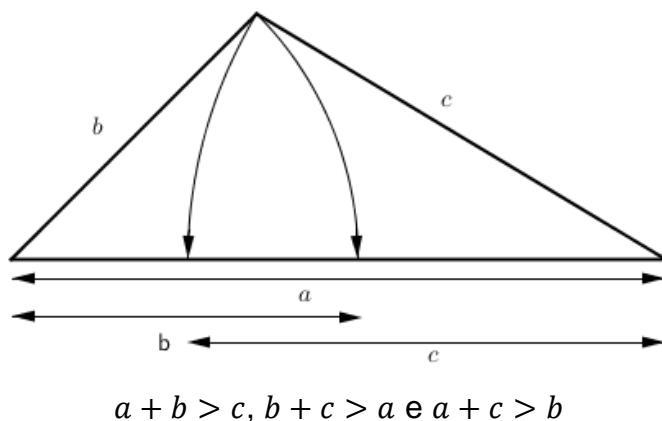


Figura 177. Desigualdade triangular

Prova. Consideremos um triângulo $[ABC]$ e mostremos que, por exemplo,

$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}.$$

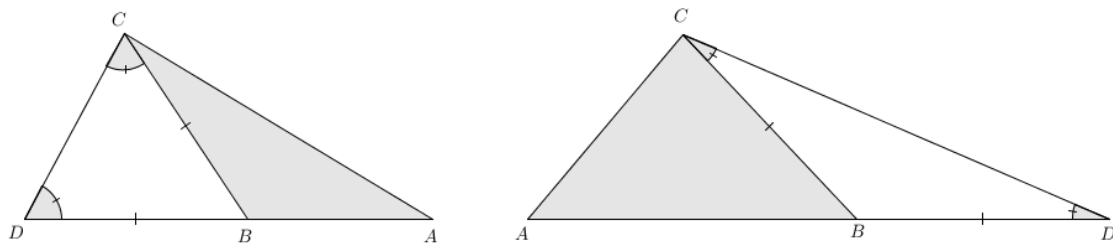


Figura 178. Esquema auxiliar à prova da Proposição 68

Marquemos um ponto D na semirreta \overrightarrow{AB} , tal que $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$ e $\overline{BD} = \overline{BC}$. Obtém-se, assim, um triângulo isósceles $[DBC]$ de base $[CD]$. Pela prova da Proposição 10, os ângulos adjacentes à base deste triângulo isósceles são congruentes, logo, $\widehat{BCD} = \widehat{BDC}$. Como B está entre A e D , então a semirreta \overrightarrow{CB} divide o ângulo ACD . Portanto, $\widehat{ACD} > \widehat{BCA}$ e $\widehat{ACD} > \widehat{BCD}$. Pela Proposição 67, temos que ao maior ângulo opõe-se o maior lado, ou seja, $\overline{AD} > \overline{AC}$. Como

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BC},$$

então $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$. ■

4.2. Desigualdades de polígonos e linhas poligonais convexas

Proposição 69.

Num polígono, o comprimento de um lado é menor que a soma dos comprimentos de todos os outros.

Prova. Tomemos, como exemplo, um pentágono $[ABCDE]$ qualquer.

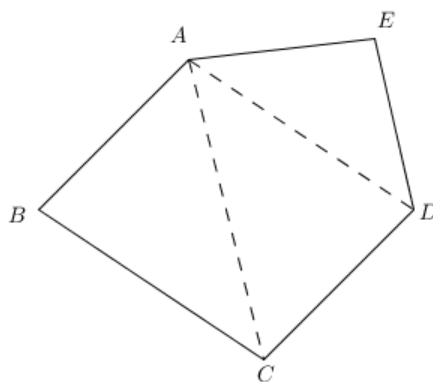


Figura 179. Desigualdade em polígonos

Dado um lado, digamos $[AB]$, vamos mostrar que o seu comprimento é menor que a soma dos comprimentos de todos os restantes lados.

Unindo o vértice A com os outros vértices, obtemos os triângulos $[ABC]$, $[ACD]$ e $[ADE]$. Pela desigualdade triangular,

$$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC},$$

$$\overline{AC} < \overline{AD} + \overline{CD},$$

$$\overline{AD} < \overline{DE} + \overline{EA}$$

e, conseqüentemente,

$$\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA}.$$

De modo análogo, podia mostrar-se o resultado para um polígono de n lados. ■

Definição. Suprimindo um lado de um polígono, obtém-se uma *linha poligonal*.

Os extremos do lado suprimido dizem-se *extremos* da linha poligonal.

A soma do comprimento dos lados chama-se *perímetro da linha poligonal*.

Uma linha poligonal diz-se *convexa* quando fica toda do mesmo lado da reta determinada por um qualquer dos seus lados.

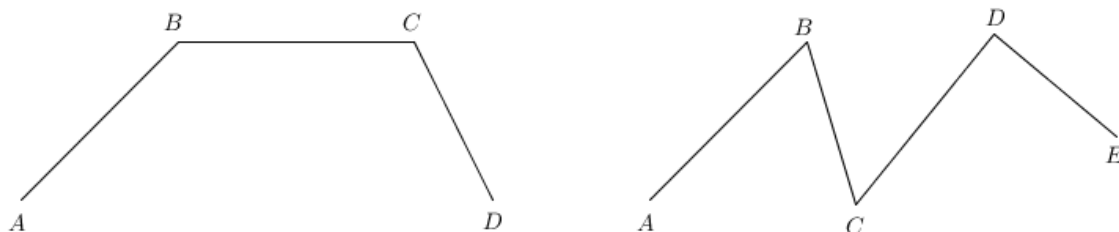


Figura 180. Linha poligonal convexa; linha poligonal não convexa

Por exemplo, ao suprimir o lado $[AD]$ do polígono $[ABCD]$, obtém-se a linha poligonal $ABCD$.

Proposição 70.

O perímetro de uma linha poligonal convexa é menor que o de qualquer outra linha que a envolve e tem os mesmos extremos.

Prova. Consideremos, por exemplo, a linha poligonal convexa $ACDB$, envolvida pela linha poligonal $AEFGB$, que contém os mesmos extremos, A e B .

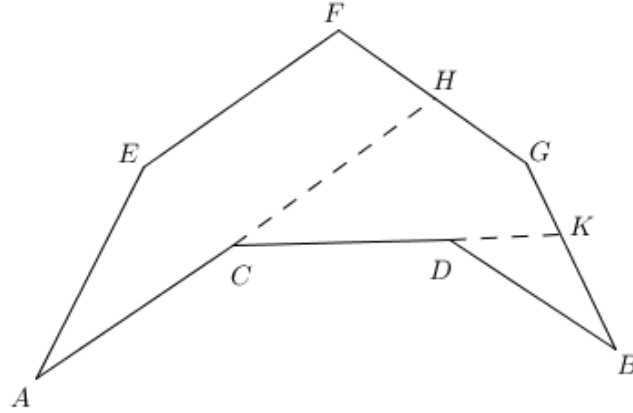


Figura 181. Desigualdade em linhas poligonais convexas

Prolonguemos os segmentos $[AC]$ e $[CD]$ até encontrar a linha envolvente, respetivamente, nos pontos H e G .

Pela Proposição 69, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\overline{AC} + \overline{CH} &< \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FG}, \\ \overline{CD} + \overline{DK} &< \overline{CH} + \overline{HG} + \overline{GK}, \\ \overline{DB} &< \overline{DK} + \overline{HB}.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB} < \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FH} + \overline{HG} + \overline{GK} + \overline{KB},$$

ou seja, o perímetro de $ACDB$ é inferior ao perímetro de $AEFGB$.

Por um raciocínio análogo, mostrar-se-ia o resultado para uma qualquer linha poligonal convexa. ■

4.3. Desigualdade envolvendo a bissetriz de um ângulo

Proposição 71.

Qualquer ponto fora da bissetriz dista desigualmente dos lados do ângulo.

Prova. Seja P um ponto não pertencente à bissetriz AD do ângulo BAC , como mostra a figura.

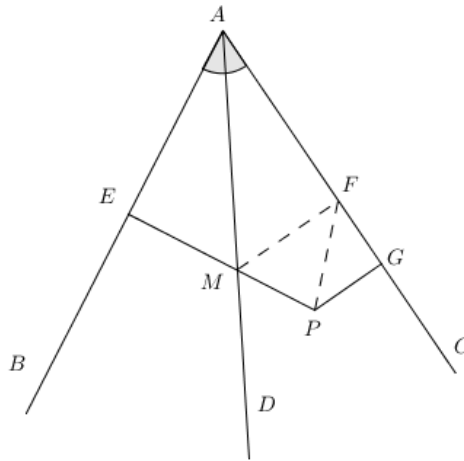


Figura 182. Desigualdade envolvendo a bissetriz

Por P tracemos as retas perpendiculares PE e PG relativamente aos lados do ângulo. Seja M o ponto de interseção de PE com a bissetriz e tracemos por M a reta PF perpendicular à reta AC .

Como a reta PG é perpendicular e a reta PF é oblíqua a AC , verifica-se que $\overline{PG} < \overline{PF}$ e, pela desigualdade triangular,

$$\overline{PF} < \overline{PM} + \overline{MF}.$$

Logo, $\overline{PG} < \overline{PM} + \overline{MF}$. Mas $\overline{MF} = \overline{ME}$, porque M pertence à bissetriz. Então

$$\overline{PG} < \overline{PM} + \overline{ME},$$

ou seja, $\overline{PG} < \overline{PE}$. ■

4.4. Desigualdades das médias aritmética, geométrica, harmónica, quadrática

Dados n números reais positivos a_1, a_2, \dots, a_n , $n > 1$, definimos:

- i. *média aritmética*, representada por MA , de a_1, a_2, \dots, a_n como o número

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n};$$

- ii. *média geométrica*, representada por MG , de a_1, a_2, \dots, a_n como o número

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n};$$

- iii. *média harmónica*, representada por MH , de a_1, a_2, \dots, a_n como o número

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}};$$

iv. *média quadrática*, representada por MQ , de a_1, a_2, \dots, a_n como o número

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

As médias antes introduzidas para n números reais positivos a_1, a_2, \dots, a_n são quantidades compreendidas entre o mínimo e o máximo destes números, o que justifica a designação comum de *média* a estas atribuída.

As suas utilizações mais antigas estão ligadas à Aritmética, Geometria e Música.

A média aritmética é a mais utilizada e a mais conhecida. É usada quando cada um dos valores em questão tem o mesmo peso, por exemplo, no cálculo da média das alturas de um grupo de pessoas.

A média geométrica é a segunda mais utilizada e é aplicada quando se pretende determinar índices ou fatores médios. É muito usada no cálculo financeiro, para calcular, por exemplo, a média da taxa anual de juro.

A média harmónica é aconselhável em problemas onde seja aplicável a proporcionalidade inversa na sua resolução.

A média quadrática é utilizada em Física e Eletrotecnia para medir, por exemplo, magnitudes de ondas.

Atendendo ao nível de ensino que estamos a tratar, os resultados a seguir apresentados serão apenas verificados para o caso particular $n = 2$.

Neste caso, supondo que $a_1 \geq a_2 > 0$, podemos caracterizar as médias aritmética, geométrica e harmónica de a_1 e a_2 pelas seguintes identidades:

$$a_1 - MA = MA - a_2, \quad \frac{a_1}{MG} = \frac{MG}{a_2} \quad \text{e} \quad \frac{a_1 - MH}{a_1} = \frac{MH - a_2}{a_2},$$

respetivamente.

4.4.1. Desigualdade da média aritmética-geométrica

Proposição 72.

Se a_1 e a_2 forem números reais não negativos, então $MA \geq MG$, ou seja,

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$$

ocorrendo igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2$.

Prova. Para todo o número real x , vale $x^2 \geq 0$. Assim,

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$$

é uma condição universal, equivalente a

$$a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \geq 0$$

ou ainda a

$$MA = \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} = MG.$$

Além disso, $MA = MG$ implica a ocorrência de igualdade nas anteriores desigualdades e, assim,

$$\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2} = 0,$$

donde $a_1 = a_2$. Reciprocamente, se $a_1 = a_2$, é claro que ocorre a igualdade

$$MA = \frac{a_1 + a_1}{2} = a_1 = \sqrt{a_1^2} = MG.$$

■

Visualização geométrica:

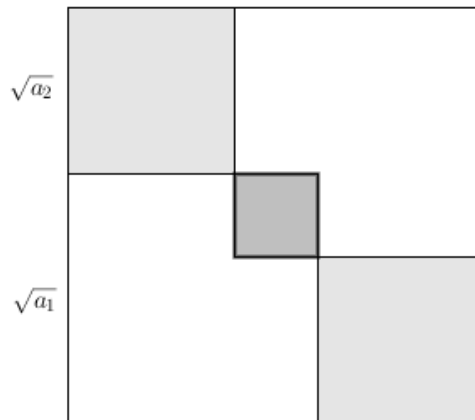


Figura 183. Desigualdade da média aritmética-geométrica

Estrategicamente, consideremos um quadrado de lado $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}$.

Por observação da figura, verificamos que

$$2(\sqrt{a_1})^2 + 2(\sqrt{a_2})^2 \geq (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2.$$

Esta desigualdade é equivalente a

$$2a_1 + 2a_2 \geq a_1 + 2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2} + a_2$$

ou, simplificando, a

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}.$$

De outro modo, poderíamos visualizar a desigualdade da média aritmética-geométrica, a partir da Figura 154, relativa à extração geométrica da raiz quadrada do produto de dois números positivos, onde o segmento que representa o número \sqrt{ab} tem comprimento claramente inferior ou igual a

$$\frac{a + b}{2}$$

(comprimento do raio da circunferência). Além disso, é claro que ocorre igualdade entre estes dois segmentos quando, e apenas quando, $a = b$.

A partir da desigualdade da média aritmética-geométrica aplicada aos números positivos a^2 e b^2 ,

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2},$$

podemos constatar um resultado interessante. Se pensarmos num retângulo de lados de comprimento a e b , esta desigualdade mostra que a área do retângulo é inferior ou igual à média aritmética das áreas de dois quadrados construídos sobre os seus lados, havendo igualdade quando o retângulo for um quadrado.

Podemos igualmente afirmar que a área de um retângulo é inferior ou igual à soma das áreas de dois triângulos retângulos isósceles, com catetos de medida igual à dos lados do retângulo.

Consideremos o retângulo R da figura e os quadrados A e B construídos sobre os seus lados.

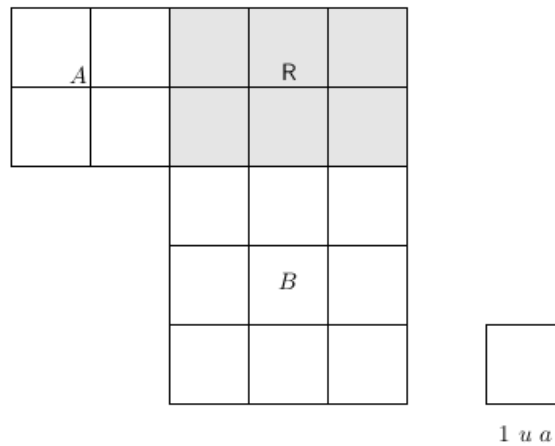


Figura 184. Consequência da desigualdade da média aritmética-geométrica

Por observação da figura, as áreas dos quadrados e do retângulo são dadas por

$$A_A = 4 \, ua, \quad A_B = 9 \, ua \quad \text{e} \quad A_R = 6 \, ua.$$

Calculando a semissoma das áreas dos quadrados, obtemos

$$\frac{A_A + A_B}{2} = \frac{13}{2} \, ua \geq A_R = 6 \, ua.$$

Com efeito, podemos substituir os quadrados por triângulos retângulos isósceles, com catetos de medida igual aos lados do retângulo R . Após recortar a figura assim obtida e dobrar ao longo dos catetos, da sobreposição entre os dois triângulos e o retângulo R , facilmente se constata uma diferença entre as áreas, pois existe uma parte excedente no triângulo de maior área. No exemplo, esta diferença é de exatamente meia unidade de área.

4.4.2. Desigualdade da média geométrica-harmônica

Se a_1, a_2 são números reais positivos, aplicando a desigualdade da média aritmética-geométrica aos seus inversos, obtém-se

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2}},$$

donde resulta a desigualdade da média geométrica-harmônica,

$$\sqrt{a_1 a_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}.$$

De seguida, apresentamos uma outra prova desta mesma desigualdade, sem recorrer à desigualdade da média aritmética-geométrica.

Proposição 73.

Se a_1 e a_2 forem números reais positivos, então $MG \geq MH$, ou seja,

$$\sqrt{a_1 a_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}},$$

ocorrendo igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2$.

Prova. É claro que

$$(a_1 - a_2)^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad a_1 a_2 \geq 0.$$

A cadeia de equivalências seguinte é, por isso, igualmente verdadeira:

$$\begin{aligned} a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2 \geq 0 &\Leftrightarrow a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2 \geq 4a_1 a_2 \\ &\Leftrightarrow a_1 a_2 (a_1 + a_2)^2 \geq 4a_1^2 a_2^2 \\ &\Leftrightarrow a_1 a_2 \geq \frac{4a_1^2 a_2^2}{(a_1 + a_2)^2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{a_1 a_2} \geq \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2}. \end{aligned}$$

Mas

$$\frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} = \frac{2}{\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}} = \frac{2}{\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1}},$$

logo

$$\sqrt{a_1 a_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1}}.$$

A igualdade nas desigualdades anteriores ocorre se, e somente se,

$$a_1 - a_2 = 0,$$

isto é, $a_1 = a_2$. ■

Visualização geométrica:

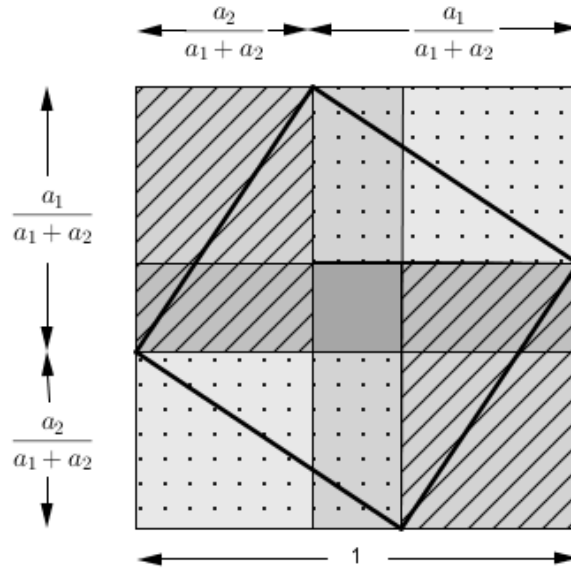


Figura 185. Desigualdade da média geométrica-harmônica

Consideremos um quadrado de lado 1 decomposto como sugere a figura. Então,

$$1 \geq 4 \frac{a_1}{a_1 + a_2} \times \frac{a_2}{a_1 + a_2},$$

isto é,

$$1 \geq \frac{4a_1a_2}{(a_1 + a_2)^2}.$$

Aplicando a raiz quadrada a ambos os membros e multiplicando-os por $\sqrt{a_1a_2}$, obtém-se

$$\sqrt{a_1a_2} \geq \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2}.$$

4.4.3. Desigualdade da média quadrática-aritmética

Proposição 74.

Se a_1 e a_2 forem números reais não negativos, então $MQ \geq MA$, ou seja,

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}} \geq \frac{a_1 + a_2}{2},$$

ocorrendo igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2$.

Prova. Consideremos a desigualdade

$$(a_1 - m)^2 + (a_2 - m)^2 \geq 0,$$

sendo

$$m = \frac{a_1 + a_2}{2} = MA.$$

Começemos por desenvolver o primeiro membro da desigualdade, utilizando os casos notáveis da multiplicação. Temos

$$a_1^2 - 2a_1m + m^2 + a_2^2 - 2a_2m + m^2 \geq 0.$$

Mas, a anterior desigualdade é equivalente a

$$a_1^2 + a_2^2 \geq 2m(a_1 + a_2 - m)$$

e, como $a_1 + a_2 - m = m$, esta pode reduzir-se a

$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \geq m^2.$$

Claro que esta última equivale à desigualdade $MQ \geq MA$.

A igualdade nas desigualdades anteriores ocorre quando, e apenas quando,

$$a_1 - m = a_2 - m = 0,$$

ou seja, quando $a_1 = a_2$. ■

Visualização geométrica:

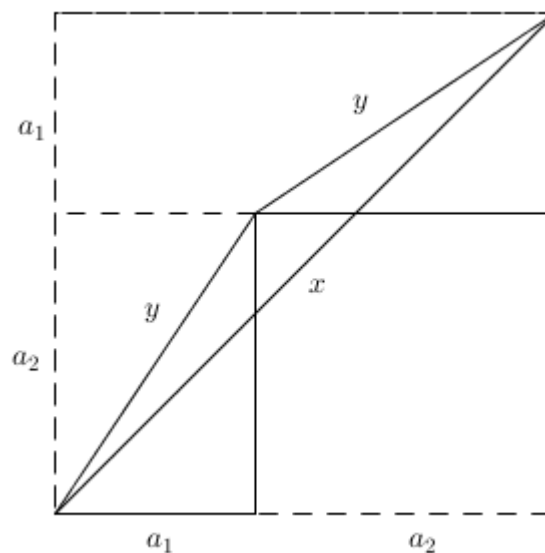


Figura 186. Desigualdade da média quadrática-aritmética

Consideremos o quadrado de lado $a_1 + a_2$, decomposto como a figura sugere.

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$x^2 = (a_1 + a_2)^2 + (a_1 + a_2)^2 \quad \text{e} \quad y^2 = a_1^2 + a_2^2;$$

donde $x = \sqrt{2} (a_1 + a_2)$ e $y = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Pela desigualdade triangular, tem-se $x \leq y + y$. Substituindo x e y , vem

$$\sqrt{2} (a_1 + a_2) \leq 2\sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

isto é,

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}}.$$

As três desigualdades anteriormente obtidas, envolvendo as médias aritmética, geométrica, harmónica e quadrática de dois números reais positivos, permitem formar uma cadeia de desigualdades, registada no resultado seguinte.

Proposição 75.

Dados dois números reais positivos, a_1, a_2 com $a_1 \leq a_2$, temos

$$a_1 \leq MH \leq MG \leq MA \leq MQ \leq a_2.$$

A igualdade ocorre numa das desigualdades anteriores (e, conseqüentemente, em todas as restantes) quando, e apenas quando, $a_1 = a_2$.

Podemos, ainda, visualizar as diversas desigualdades, envolvendo as médias antes abordadas, quando $n = 2$, na figura seguinte retirada de [28].

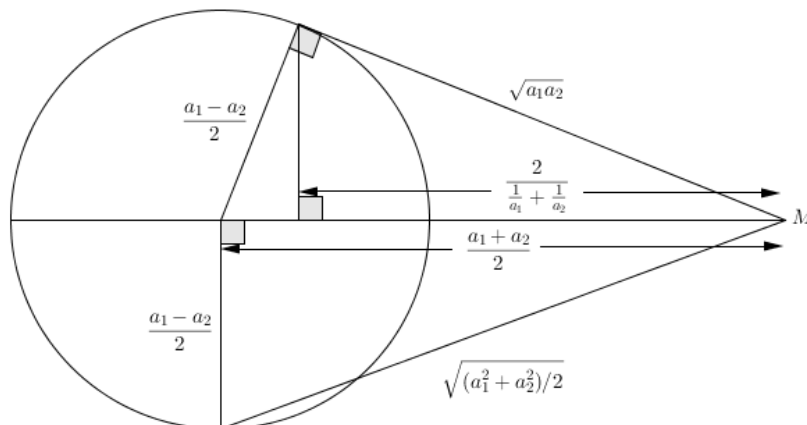


Figura 187. Desigualdades das médias

4.5. Desigualdade de Cauchy-Shwarz

Augustin Louis Cauchy (1789–1857) foi um dos mais extraordinários matemáticos do mundo e o seu nome estará para sempre associado à análise real e complexa. Os seus trabalhos foram publicados em 27 volumes, com o título “Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy” (1882–1970).

Karl Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) foi um matemático alemão conhecido pelo seu trabalho em análise complexa.

A desigualdade a seguir enunciada foi publicada por Cauchy em 1821 e revisitada por Schwarz em 1888. Mostraremos apenas o caso $n = 2$, pelas razões já anteriormente apresentadas.

Proposição 76. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, $n > 1$, números reais dados, não todos nulos. Então,

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2},$$

havendo igualdade se, e somente se, $a_ib_j = a_jb_i$, para $1 \leq i < j \leq n$.

Prova. ($n = 2$) Verifica-se que

$$\begin{aligned} |a_1b_1 + a_2b_2| &\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \Leftrightarrow (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \\ &\Leftrightarrow (a_1b_1)^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + (a_2b_2)^2 \leq a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2, \end{aligned}$$

sendo esta última uma afirmação universal.

Além disso, fica claro que a ocorrência de igualdade se caracteriza pela condição $a_1b_2 = a_2b_1$. ■

CONCLUSÃO

O desígnio deste trabalho surgiu no seguimento da formação que foi realizada no âmbito das Metas Curriculares de Matemática – 3.º Ciclo do Ensino Básico.

Numa fase inicial, pensámos que seria interessante fazer um estudo relacionado com o tema “Provas Sem Palavras de Desigualdade de Números Reais”. Porém, numa fase posterior, pareceu-nos que, pelo facto de a Geometria ser um dos temas fulcrais no ensino da Matemática em Portugal, estando presente nos três ciclos de ensino, e de o aluno dever apresentar uma demonstração matemática com algum grau de exigência, de acordo com as orientações constantes no atual Programa de Matemática e nas Metas Curriculares, o tema escolhido para a dissertação deveria ser *Provas de Geometria e Medida no âmbito das Metas Curriculares de Matemática no 3.º Ciclo*.

O trabalho apresentado centrou-se na consulta de vários livros, manuais escolares, essencialmente do 3.º ciclo, e de alguns documentos orientadores, nomeadamente, *Novo Programa de Matemática, Metas Curriculares e Brochuras de Álgebra e de Geometria*, do Ministério da Educação. Foram, ainda, consultados sítios na *Internet* alusivos aos temas em análise, tomados como fidedignos.

Para a concretização do primeiro capítulo, que fundamenta o título atribuído a esta tese, foi essencial a exploração dos documentos orientadores citados. Seguindo as suas diretrizes, foram apresentados alguns conceitos básicos de Geometria, tendo-se iniciado com a visualização de objetos e conceitos essenciais tais como: pontos, segmentos de reta, retas, semirretas, paralelismo e perpendicularidade, para, a

partir deles, abordar objetos e conceitos mais complexos, nomeadamente polígonos, circunferências ou ângulos.

Para o 7.º ano, foi apresentada a classificação de quadriláteros, cálculo das respetivas áreas e as suas propriedades, envolvendo congruências de triângulos, Teorema de Tales e relação entre perímetros e áreas de figuras semelhantes. No tocante ao 8.º ano, relacionou-se o Teorema de Pitágoras, embora num capítulo exclusivamente dedicado a este importante resultado, com a semelhança de triângulos e foram reconhecidas propriedades das translações do plano e das isometrias. Por último, no que concerne ao 9.º ano, foi exposto o vocabulário próprio do método axiomático, identificados factos essenciais da axiomatização da Geometria, caracterizada a Geometria Euclidiana, através do Axioma das Paralelas e identificadas as posições relativas de retas no plano. Foram, ainda, descritas, algumas propriedades relativas aos lugares geométricos, envolvendo pontos notáveis de triângulos, a ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência e às razões trigonométricas de ângulos agudos.

É oportuno salientar que as Metas Curriculares estão organizadas por domínios, para cada nível de ensino, o que é uma mais-valia, na medida em que se aproxima da forma como os docentes fazem as suas planificações anuais e pode contribuir para o aprofundamento da reflexão sobre situações que possam melhorar as aprendizagens dos alunos.

Estando subentendido, nas Metas Curriculares, que o aluno deve conseguir provar ou demonstrar alguns resultados, foi apresentada, uma compilação de teoremas, corolários ou proposições, de um modo geral previstos no documento referido no âmbito do domínio Geometria e Medida, e elaboradas as respetivas demonstrações, apoiadas, sempre que oportuno, em esquemas geométricos elucidativos. Assim, esta dissertação constitui uma importante ferramenta de trabalho para todos os professores que lecionam a disciplina de Matemática aos alunos do 3.º ciclo.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Objetos primitivos: ponto, reta e plano	7
Figura 2. A , B e C pertencem à mesma reta r	9
Figura 3. r é a única reta que contém os pontos A e B	9
Figura 4. Entre dois pontos quaisquer existe sempre um outro ponto	10
Figura 5. Segmento de reta de extremos A e B	10
Figura 6. $\overline{AB} > 0$; $\overline{AB} = 0$	11
Figura 7. A distância entre A e B é $ b - a $	11
Figura 8. $\overline{AC} = c - a $, $\overline{CB} = b - c $, $\overline{AB} = b - a $	11
Figura 9. Semirreta \overrightarrow{AB}	12
Figura 10. Semirreta \overrightarrow{AB} e um ponto C que lhe pertence	12
Figura 11. Ângulo convexo; ângulo não convexo	13
Figura 12. $\widehat{A\hat{V}B} > 0^\circ$; $\widehat{A_1\hat{V}_1B_1} = 0^\circ$	13
Figura 13. Correspondência biunívoca entre as semirretas, \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OC} , e os números β e α	14
Figura 14. $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}$	15
Figura 15. Triângulo $[ABC]$, ângulo interno i e ângulo externo e	16
Figura 16. Classificação de triângulos quanto aos lados	16
Figura 17. Classificação de triângulos quanto aos ângulos	17
Figura 18. Triângulos congruentes.....	17
Figura 19. 1.º caso de congruência de triângulos	18
Figura 20. $\angle DAE$ e $\angle BAC$ são verticalmente opostos.....	18

Figura 21. Teorema de ângulo externo	19
Figura 22. Esquema auxiliar à prova do Teorema de ângulo externo	20
Figura 23. $\hat{A}BC + \hat{B}CA < 180^\circ$	20
Figura 24. Retas t e s são concorrentes oblíquas; retas r e s são concorrentes perpendiculares.....	21
Figura 25. $m \perp t$ e $n \perp t$; m e n não se intersectam	22
Figura 26. Duas retas concorrentes intersectadas por uma secante formam oito ângulos.....	23
Figura 27. Esquema auxiliar à prova do Corolário 4	24
Figura 28. Retas r e s paralelas; retas s e t coincidentes	25
Figura 29. Axioma das Paralelas: r contém P e $r \parallel s$	25
Figura 30. Infinitude de retas paralelas a r , contendo o ponto P	26
Figura 31. n intersecta as retas paralelas m e m_1	27
Figura 32. $r \parallel s$ e $r \parallel t$, logo $s \parallel t$	27
Figura 33. A transversal t intersecta as retas paralelas s e r	28
Figura 34. Esquema auxiliar à prova da Proposição 6	28
Figura 35. Reta perpendicular a m passando por A	29
Figura 36. Esquema auxiliar à Proposição 7	30
Figura 37. Soma dos ângulos internos de um triângulo	31
Figura 38. Polígono não convexo; polígono convexo de vértices A, B, C, D e E e diagonal $[CE]$	33
Figura 39. Undecágono regular de lado l e ângulo interno i	34
Figura 40. Polígonos congruentes.....	34
Figura 41. 2.º caso de congruência de triângulos	35
Figura 42. Esquema auxiliar à prova da Proposição 9	35
Figura 43. Triângulo isósceles e respectivos lados congruentes.	36
Figura 44. Triângulo isósceles e respectivos ângulos congruentes.	37
Figura 45. 3.º caso de congruência de triângulos	37
Figura 46. Esquema auxiliar à prova da Proposição 11	38
Figura 47. Teorema de Tales no triângulo	39
Figura 48. Esquema auxiliar à prova do Teorema de Tales no triângulo	40
Figura 49. Retas transversais cortadas por um feixe de retas paralelas	41

Figura 50. Esquema auxiliar à prova do Teorema de Tales	41
Figura 51. Polígonos semelhantes	42
Figura 52. 1.º critério de semelhança de triângulos	43
Figura 53. 2.º critério de semelhança de triângulos	44
Figura 54. 3.º critério de semelhança de triângulos	45
Figura 55. Triângulo retângulo e a respetiva altura	46
Figura 56. n -ágonos semelhantes	47
Figura 57. Triângulos semelhantes	48
Figura 58. Polígonos semelhantes decompostos em triângulos correspondentes semelhantes	49
Figura 59. Ângulo externo e	50
Figura 60. Soma dos ângulos internos de um quadrilátero	51
Figura 61. Polígono convexo de n lados decomposto em $n - 2$ triângulos	52
Figura 62. Polígono convexo com n lados e respetivos ângulos interno e externo num dado vértice	53
Figura 63. Esquema auxiliar à prova da Proposição 22	53
Figura 64. Quadriláteros	55
Figura 65. No quadrilátero $[ABCD]$, $[AB]$ é o lado oposto a $[DC]$ e $[AD]$ é o lado oposto a $[BC]$	55
Figura 66. Lados e ângulos opostos de um paralelogramo	56
Figura 67. Paralelogramo e as respetivas diagonais	57
Figura 68. Esquema auxiliar à prova da Proposição 25	57
Figura 69. Diagonais iguais de um paralelogramo	58
Figura 70. Diagonais de um papagaio	59
Figura 71. Diagonais de um losango	60
Figura 72. Trapézio com bases iguais	61
Figura 73. Retângulo $[ABCD]$	62
Figura 74. Quadrado de lado $a + b$	62
Figura 75. A' é a projeção ortogonal do ponto A sobre uma reta r	63
Figura 76. Área de um paralelogramo	64
Figura 77. Área de um triângulo	65
Figura 78. Área de um papagaio	66

Figura 79. Área de um trapézio	67
Figura 80. Segmentos notáveis de um triângulo	68
Figura 81. Triângulo isósceles.....	68
Figura 82. Circuncentro do triângulo	69
Figura 83. Ortocentro de um triângulo.....	70
Figura 84. Esquema auxiliar para a prova da Proposição 37	71
Figura 85. Bissetriz de um ângulo	72
Figura 86. Esquema auxiliar à prova da Proposição 38	73
Figura 87. Triângulo e duas das suas bissetrizes	73
Figura 88. Incentro do triângulo.....	74
Figura 89. Triângulo e duas das suas medianas.....	75
Figura 90. Esquema auxiliar à prova da Proposição 40	75
Figura 91. Triângulo retângulo inscrito numa circunferência	77
Figura 92. Elementos de uma circunferência	78
Figura 93. Amplitude de um arco de circunferência	78
Figura 94. Cordas determinadas por ângulos ao centro iguais	79
Figura 95. Circunferência e respetiva corda.....	80
Figura 96. Amplitude de um ângulo inscrito	81
Figura 97. Arcos inscritos num mesmo arco	82
Figura 98. Ângulos inscritos numa semicircunferência	83
Figura 99. Âmplitude de um ângulo de segmento	83
Figura 100. Ângulo ex inscrito	84
Figura 101. Ângulo convexo de vértice no interior da circunferência	85
Figura 102. Ângulo convexo de vértice no exterior da circunferência	86
Figura 103. Quadrilátero inscrito numa circunferência	87
Figura 104. Semirretas com a mesma reta suporte	88
Figura 105. Semirretas com retas suporte distintas	89
Figura 106. $[A, B]$ e $[C, D]$ têm a mesma direção e mesmo sentido; $[A, B]$ e $[E, F]$ têm a mesma direção e sentido oposto.....	89
Figura 107. Segmentos orientados equipolentes	90
Figura 108. Vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w}	91
Figura 109. Vetores colineares.....	91

Figura 110. Vetores simétricos.....	92
Figura 111. Regra do triângulo: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$	92
Figura 112. Regra do paralelogramo: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$	93
Figura 113. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$ (caso i).....	93
Figura 114. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$ (caso ii).....	94
Figura 115. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$ (caso iii)	94
Figura 116. Propriedade comutativa $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$	94
Figura 117. Propriedade associativa $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$	95
Figura 118. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$	96
Figura 119. Translação do ponto P segundo o vetor \vec{u}	96
Figura 120. Composta de translações 1.....	96
Figura 121. Composta de translações 2.....	97
Figura 122. Reflexão de um triângulo segundo o eixo r	97
Figura 123. Reflexão deslizante de um triângulo segundo o eixo r e o vetor \vec{u} ...	98
Figura 124. Rotação de centro O e amplitude α	98
Figura 125. Propriedade das isometrias 1.....	99
Figura 126. Propriedades das isometrias 2.....	99
Figura 127. Propriedades das isometrias 3.....	100
Figura 128. Simetria de reflexão	101
Figura 129. Simetrias de rotação	101
Figura 130. Simetria de translação.....	102
Figura 131. Simetria de reflexão deslizante	102
Figura 132. Cateto oposto, cateto adjacente ao ângulo α e hipotenusa do triângulo retângulo	103
Figura 133. Triângulos retângulos semelhantes de razão r	104
Figura 134. Triângulo retângulo em C	105
Figura 135. Triângulo retângulo em C e ângulos complementares α e β	106
Figura 136. Demonstração original do Teorema de Pitágoras	112
Figura 137. Triângulo retângulo em A e altura h relativa à hipotenusa	113
Figura 138. Esquema 1 auxiliar à prova do Recíproco do Teorema de Pitágoras	114

Figura 139. Esquema 2 auxiliar à prova do Recíproco do Teorema de Pitágoras	115
Figura 140. Prova de Bhaskara.....	116
Figura 141. Prova de James A. Garfield	117
Figura 142. Prova do quadrado chinês	118
Figura 143. Prova de Henry Dudeney	119
Figura 144. Prova de Pappus.....	120
Figura 145. Prova de Michael Hardy	121
Figura 146. Prova de Leonardo Da Vinci	122
Figura 147. Antiga demonstração grega	123
Figura 148. Prova de Euclides: “a Cadeira da Noiva”	124
Figura 149. Prova de George Pólya	126
Figura 150. Quadrado formado pelas sete peças do Tangram	127
Figura 151. Prova usando o Tangram.....	128
Figura 152. Semicírculos sobre os catetos e hipotenusa de um triângulo retângulo	129
Figura 153. Lúnulas de Hipócrates.....	130
Figura 154. Figuras semelhantes sobre os catetos e hipotenusa de um triângulo retângulo	131
Figura 155. Diagonal num quadrado de lado 1 unidade.....	132
Figura 156. Extração geométrica da raiz quadrada do produto de dois números	133
Figura 157. Distância entre dois pontos do plano	135
Figura 158. Distância entre dois pontos do espaço.....	136
Figura 159. Adição de duas grandezas.....	139
Figura 160. Produto de duas grandezas	140
Figura 161. Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição	140
Figura 162. Produto de dois binômios.....	140
Figura 163. Quadrado da soma.....	141
Figura 164. Quadrado da diferença.....	141
Figura 165. Diferença de quadrados	142
Figura 166. Adição do quadrado da soma com o quadrado da diferença	142

Figura 167. Outro caso envolvendo quadrados.....	143
Figura 168. Cubo da soma.....	144
Figura 169. Cubo da diferença.....	144
Figura 170. Regra de Pitágoras para calcular o quadrado de um número inteiro	145
Figura 171. Segmentos de reta $[AB]$ e $[CD]$	148
Figura 172. Caso i. de (des)igualdade de segmentos de reta.....	148
Figura 173. Caso ii. de desigualdade de segmentos de reta.....	148
Figura 174. Caso iii. de desigualdade de segmentos de reta.....	148
Figura 175. Triângulo de lados não congruentes.....	149
Figura 176. Triângulo de ângulos não congruentes.....	150
Figura 177. Desigualdade triangular.....	150
Figura 178. Esquema auxiliar à prova da Proposição 68.....	151
Figura 179. Desigualdade em polígonos.....	151
Figura 180. Linha poligonal convexa; linha poligonal não convexa.....	152
Figura 181. Desigualdade em linhas poligonais convexas.....	153
Figura 182. Desigualdade envolvendo a bissetriz.....	154
Figura 183. Desigualdade da média aritmética-geométrica.....	156
Figura 184. Consequência da desigualdade da média aritmética-geométrica ...	158
Figura 185. Desigualdade da média geométrica-harmônica.....	160
Figura 186. Desigualdade da média quadrática-aritmética.....	161
Figura 187. Desigualdades das médias.....	162

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Designação
$=$	É igual a
\neq	Não é igual a; é diferente de
$<$	É menor que
$>$	É maior que
\leq	É menor ou igual a
\geq	É maior ou igual a
\in	Pertence a
$ $	Valor absoluto ou módulo
$\sqrt{}$	Raiz quadrada
\Leftrightarrow	É equivalente a
\cap	Interseção de conjuntos
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais

Trigonometria

Símbolo	Entidade trigonométrica
---------	-------------------------

$\operatorname{sen} \alpha$	seno de α
-----------------------------	------------------

$\cos \alpha$	cosseno de α
---------------	---------------------

$\tan \alpha$	tangente de α
---------------	----------------------

Geometria

Símbolo	Entidade geométrica
---------	---------------------

AB	Reta que contém os pontos A e B
------	-------------------------------------

\overrightarrow{AB}	Semirreta de origem A e que contém B
-----------------------	------------------------------------------

$[AB]$	Segmento de reta de extremos A e B
--------	----------------------------------------

$[A, B]$	Segmento de reta orientado de extremos A e B
----------	--------------------------------------------------

\overline{AB}	Comprimento do segmento de reta de extremos A e B
-----------------	-------------------------------------------------------

\overrightarrow{AB} ou \vec{u}	Vetor AB ou vetor u
------------------------------------	-------------------------

$[ABC]$	Triângulo de vértices A, B e C
---------	------------------------------------

$[ABCD]$	Polígono de vértices A, B, C e D
----------	--------------------------------------

$ABCD$	Linha poligonal de extremos A e D
--------	---------------------------------------

$\angle AVB$	Ângulo AVB
--------------	--------------

$A\hat{V}B$	Medida da amplitude do ângulo AVB
-------------	-------------------------------------

\hat{A}	Medida da amplitude do ângulo A
-----------	-----------------------------------

$^\circ$	Unidade de medida da amplitude do ângulo – grau
----------	-------------------------------------------------

\widehat{AB}	Medida do arco AB
$A \equiv A'$	O ponto A coincide com o ponto A'
$[ABC] \cong [A'B'C']$	O triângulo ABC é congruente com o triângulo $A'B'C'$
$P_{[ABCD]}$	Perímetro do polígono $[ABCD]$
$A_{[ABCD]}$ ou $A([ABCD])$	Área do polígono $[ABCD]$
$r//s$	A reta r é paralela à reta s
$r \perp s$	A reta r é paralela à reta s

BIBLIOGRAFIA

- [1] Alsina, Claudi; Nelsen, Roger B. - An invitation to proofs without words, **European Journal of Pure and Applied Mathematics**. ISSN 1307-5543. Vol. 3, N.º 1 (2010) 118-127.
- [2] Alsina, Claudi; Nelsen, Roger B. - **Math made visual: creating images for understanding mathematics**. Washington: Mathematical Association of America, 2006. ISBN 0883857464.
- [3] Alsina, Claudi; Nelsen, Roger B. - **When less is more: visualizing basic inequalities**. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2009. ISBN 0883853426.
- [4] Araújo, Paulo Ventura - **Curso de geometria**. Lisboa: Gradiva, 1998. ISBN 9726625912.
- [5] Barbosa, João Lucas Marques - **Geometria euclidiana plana**. Rio de Janeiro: SBM, 1985. ISBN 9788585818029.
- [6] Barnett, Raymond A; Ziegler, Michael R; Byleen, Karl E - **Analytic trigonometry with applications**. 9.^a ed. Hoboken, NJ: John Wiley, 2006. ISBN 047174655X.
- [7] Bivar, António; Grosso, Carlos; Oliveira, Filipe; Timóteo, Maria Clementina - **Metas Curriculares do Ensino Básico - Matemática**. Ministério da Educação e Ciência: Direção Geral de Educação. 2012.

- [8] Bivar, António; Grosso, Carlos; Oliveira, Filipe; Timóteo, Maria Clementina - **Metas Curriculares do Ensino Básico - Matemática: caderno de apoio 2.º ciclo**. Ministério da Educação e Ciência: Direcção Geral de Educação. 2012.
- [9] Bivar, António; Grosso, Carlos; Oliveira, Filipe; Timóteo, Maria Clementina - **Metas Curriculares do Ensino Básico - Matemática: Caderno de Apoio 3.º ciclo**. Ministério da Educação e Ciência: Direcção Geral de Educação. 2013.
- [10] Birkhoff, George David; Beatley Ralph - **Basic geometry**. 3.^a ed. Providence: AMS Chelsea Publishing, 1999. ISBN 0821821016.
- [11] Bonifácio, José Alves - **Geometria elementar no plano e no espaço**. 2.^a ed. Porto: Livraria Chardron, 1892.
- [12] Breda, Ana; Serrazina, Lurdes; Menezes, Luís; Sousa, Hélia; Oliveira, Paulo - **Geometria e Medida no Ensino Básico**. Ministério da Educação: Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, 2011.
- [13] Conceição, Alexandra; Almeida, Matilde - **Matematicamente falando 7**. Porto: Areal Editores, 2013. ISBN 9789896475987.
- [14] Conceição, Alexandra; Almeida, Matilde - **Matematicamente falando 8**. Porto: Areal Editores, 2011. ISBN 9789896472924.
- [15] Conceição, Alexandra; Almeida, Matilde - **Matematicamente falando 9**. Porto: Areal Editores, 2012. ISBN 9789896473860.
- [16] Costa, Belmiro; Rodrigues, Ermelinda - **Novo espaço: Matemática 9**. Porto: Porto Editora, 2012. ISBN 9789720327345.
- [17] Delahaye, Jean Paul - Les preuves sans mots: En mathématiques, un petit dessin vaut-il mieux qu'un long discours? **Pour la Science**. N.º 244 (1998), 100 – 105.
- [18] Dionísio, José Joaquim - **Fundamentos da geometria**. Lisboa: Faculdade de Ciências [da] Universidade de Lisboa, 2004. ISBN 0728394187.

Dolce, O. - **Fundamentos de Matemática Elementar**. 9.^a ed. [S.l.], 2013. ISBN 9788535716863.

[19] Faria, Luísa; Almeida, Pedro Rocha; Antão, Catarina - **Matemática dinâmica 7**. Porto: Porto Editora, 2010. ISBN 9789720322913.

[20] Faria, Luísa; Almeida, Pedro Rocha; Antão, Catarina - **Matemática dinâmica 8**. Porto: Porto Editora, 2011. ISBN 9789720322241.

[21] Faria, Luísa; Almeida, Pedro Rocha; Antão, Catarina; Ferreira, Mário - **Matemática dinâmica 9**. Porto: Porto Editora, 2012. ISBN 9789720322159

[22] Figueiredo, Mirtes Aparecida - **Oficinas “Provas sem palavras”**. Universidade Federal de Minas Gerais ICEx, Departamento de Matemática, 2010.

[23] Gispert, Carlos - **Enciclopédia audiovisual educativa: matemática I e II**. Lisboa: Liarte Multimédia, 1998. ISBN 8449403278.

[24] Hadamard, Jacques - **Leçons de géométrie élémentaire**. 3.^a ed. Paris: Armand Colin, 1916-1917.

[25] Kazarinoff, Nicholas D. - **Geometric inequalities**. 10.^a ed. Washington : MAA, 1987. ISBN 0883856042.

[26] Lima, Elon Lages - **Análise real**. 3.^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1997-2011. ISBN 978852440269.

[27] Lima, Elon Lages - **Curso de análise V1**. 6.^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1989. ISBN 8524400471.

[28] Nelsen, Roger B. - **Proofs without words: exercises in visual thinking**. Washington : MAA, 1993. ISBN 0883857006.

[29] Neves, Maria Augusta Ferreira; Silva, António Pinto - **Matemática 7**. Porto: Porto Editora, 2013. ISBN 9789720327512.

- [30] Neves, Maria Augusta Ferreira; Silva, António Pinto - **Matemática 8**. Porto: Porto Editora, 2014. ISBN 9789720327536.
- [31] Neves, Maria Augusta Ferreira; Silva, António Pinto; Raposo, Maria José; Silva, Jorge Nuno - **Matemática 7**. Porto: Porto Editora, 2010. ISBN 97897203222524.
- [32] Neves, Maria Augusta Ferreira; Silva, António Pinto; Raposo, Maria José; Silva, Jorge Nuno - **Matemática 8**. Porto: Porto Editora, 2011. ISBN 9789720322555.
- [33] Neves, Maria Augusta Ferreira; Silva, António Pinto; Raposo, Maria José; Silva, Jorge Nuno - **Matemática 9**. Porto: Porto Editora, 2012. ISBN 9789720322463.
- [34] Neves, Maria do Carmo Sena; Neves, José Manuel Sena - **Dicionário de matemática: para ensino secundário**. Lisboa: Didáctica Editora, 2001. ISBN 9726505313.
- [35] Passos, Iolanda Centeno; Correia, Olga Flora - **Matemática em acção 8**. Lisboa: Lisboa Editora, 2011. ISBN 9789726808039.
- [36] Passos, Iolanda Centeno; Correia, Olga Flora - **Matemática em acção: Pitágoras em puzzle**. Lisboa: Lisboa Editora, 2003. ISBN 9726805368.
- [37] Ponte, João Pedro da; Branco, Neuza; Matos, Ana - **Álgebra no Ensino Básico**. Ministério da Educação: Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, 2009.
- [38] Ralha, Elfrida; Oliveira, Augusto Franco de; Loureiro, Cristina; Bastos, Rita - **Brochura de Matemática: Geometria 10.º ano**. Ministério da Educação, 1997.
- [39] Rich, Barnett - **Geometria plana**. São Paulo: McGraw-Hill, 1972.

[40] Sequeira, Ana Filipa; Andrade, Ana Pais; Almeida, Célia; Beja, Elisabete - **Matemática 5: Olá, matemática!** Porto: Porto Editora, 2014. ISBN 9789720205391.

NETGRAFIA

[N1] E-biografias. [Em linha]. [Consult. set. 2014] Disponível em:

<http://www.e-biografias.net/>

[N2] El Teorema de Pitágoras. [Em linha]. [Consult. nov. 2013; jul. e set. 2014] Disponível em:

<http://www.arrakis.es/~mcj/teorema.htm>

[N3] Garbi, Gilberto Geraldo, **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 3.^a ed. [Em linha]. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. [Consult. mai., ago. e set. 2014] Disponível em:

<http://books.google.pt/books?id=4e1Ool2d7l4C&pg=PA474&lpg=PA474&dq=a+rainha+das+ciencias+download&source=bl&ots=RmzNNM3pRH&sig=L5pM03A7IK4c-VnVI3jNgsOROmI&hl=pt-PT&sa=X&ei=7HNRVPH6FYmV7Abc8oEI&ved=0CC4Q6AEwAg#v=onepage&q&f=false>

[N4] [Khanacademy - Propriedades especiais e partes dos triângulos](http://www.fundacaolemann.org.br/khanportugues/matematica/geometria/propriedades_especiais_e_partes_dos_triangulos). [Em linha].

[Consult. mai. e set. 2014] Disponível em:

http://www.fundacaolemann.org.br/khanportugues/matematica/geometria/propriedades_especiais_e_partes_dos_triangulos

[N5] Many proofs of Pythagorean Theorem. [Em linha]. [Consult. nov. e dez. 2013; ago. 2014] Disponível em:

http://www.takayaiwamoto.com/Pythagorean_Theorem/Pythagorean_Theorem.html

[N6] Matemática sem Palavras (exercícios de pensamento visual). [Em linha].

[Consult. nov. 2013] Disponível em:

http://www.atractor.pt/mat/sem_palavras/index.htm

[N7] Miller, Robin L., On proofs without words. 2012. [Em linha]. [Consult. nov. 2013; ago. 2014] Disponível em:

<http://www.whitman.edu/mathematics/SeniorProjectArchive/2012/Miller.pdf>

[N8] Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. [Em linha]. [Consult. jul., ago. e out. 2014] Disponível em:

http://area.dgidec.min-edu.pt/materiais_NPMEB/home.htm

[N9] O quinto postulado de Euclides. [Em linha]. [Consult. set. e out. 2014] Disponível em:

<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euclides/postuladoeuclides.htm>

[N10] Os Elementos de Euclides. [Em linha]. [Consult. out. 2014] Disponível em:

<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euclides/elementoseuclides.htm>

[N11] Os pitagóricos e os números irracionais. [Em linha]. [Consult. nov. 2014] Disponível em:

<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm28/numeros%20irracionais.htm>

[N12] Pappus of Alexandria. [Em linha]. [Consult. dez. 2014] Disponível em:

http://en.wikipedia.org/wiki/Pappus_of_Alexandria

[N13] Pogorélov, A. V. **Geometria Elemental**. [Em linha]. Moscú: Editorial Mir, 1974. [Consult. nov. 2014] Disponível em:

http://geometriaunicaes.files.wordpress.com/2012/04/geometria_elemental_archivo1.pdf

[N14] Programa de Matemática do Ensino Básico. Ministério da Educação: Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, 2007. [Em linha]. [Consult. set. e nov. 2014] Disponível em:

http://area.dgidec.min-edu.pt/materiais_NPMEB/028_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf

[N15] Programa e Metas Curriculares - Matemática. [Em linha]. [Consult. out. 2013 e mar.; abr. 2014] Disponível em:

<http://dge.mec.pt/metascurriculares/index.php?s=directorio&pid=17>

[N16] Pythagorean Theorem and its many proofs. [Em linha]. [Consult. dez. 2013] Disponível em:

<http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml#84>

[N17] Teorema de Pitágoras. [Em linha]. [Consult. jul. e out. 2014] Disponível em:

<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm28/torema.htm>